1 מרחבים עצמיים מוכללים

הוכחנו כי אם נצליח לפרק את המרחב שלנו לתתי-מרחבים אינווריאנטיים, המטריצה המייצגת של אופרטור תהיה אלכסונית בלוקים. כעת נבנה את המרחבים האלו. במקרה של אופרטור לכסין, היו n וקטורים עצמיים, ואז הפירוק היה בדיוק לסכום הישר של המרחבים העצמיים. עם זאת, במטריצות שאינן לכסינות (כמו בלוק ז'ורדן), אין מספיק וקטורים עצמיים, ולכן נכליל את ההגדרה ונגדיר:

הגדרה 1. יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ ממימד n, יהי $T : V \to V$ אופרטור לינארי, ויהי $\lambda \in \mathbb{F}$ ערך עצמי של T. נגדיר

$$K_\lambda = \ker\left[(T - \lambda I)^n\right]$$

K_λ נקרא **המרחב העצמי המוכלל** של T הקשור ל-λ.

נעבור להגדרה אחרת, נוכיח עליה למה פשוטה ואז נחזור למושג שהגדרנו.

הגדרה 2. יהי $T : V \to V$ אופרטור לינארי, ויהי $0 \neq v \in V$. קבוצה בת m איברים מהצורה $E = \left\{T^{m-1}(v), \ldots, T(v), v\right\}$ נקראת **מסלול מאורך** m, אם $T^{m-1}(v) \neq 0$, אבל $T^m(v) \neq 0$.

למה 1. *בסימונים הנ"ל, E קבוצה בת"ל.*

הוכחה. נניח ש-$\alpha_0 v + \alpha_1 T(v) + \cdots + \alpha_{m-1} T^{m-1}(v) = 0 \quad (\star)$. נפעיל T^{m-1}:

$$T^{m-1}\left(\alpha_0 v + \alpha_1 T(v) + \cdots + \alpha_{m-1} T^{m-1}(v)\right) = T^{m-1}(0)$$

$$\alpha_0 \underbrace{T^{m-1}(v)}_{\neq 0} + \underbrace{\alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \cdots + \alpha_{m-1} \cdot 0}_{0} = 0$$

לכן $\alpha_0 = 0$. נציב ב-$(\star)$, ונקבל

$$(\star) \quad \alpha_1 T(v) + \cdots + \alpha_{m-1} T^{m-1}(v) = 0$$

הפעם נפעיל T^{m-2}, ועל ידי חישוב דומה נקבל $\alpha_1 = 0$. כך ממשיכים, ומקבלים

$$\alpha_0 = \cdots = \alpha_{m-1} = 0$$

$\square$

נחזור למרחב העצמי המוכלל.

למה 2. *יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$, יהי $T : V \to V$ אופרטור לינארי, ויהי $\lambda \in \mathbb{F}$ ערך עצמי של T.*

1. $K_\lambda = \left\{v \in V \mid \exists k \in \mathbb{N} : (T - \lambda I)^k v = 0\right\}$.
2. $V_\lambda \subseteq K_\lambda$.
3. *K_λ תת-מרחב אינווריאנטי תחת T, ולכן גם תחת כל אופרטור בצורה $p(T)$, כאשר $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ פולינום כלשהו.*

הוכחה. 1. נסמן $K'_\lambda = \left\{v \in V \mid \exists k \in \mathbb{N} : (T-\lambda I)^k v = 0\right\}$, ונוכיח $K_\lambda = K'_\lambda$.

$\boxed{\subseteq}$ טריוויאלי, אם ניקח $k = n$.

$\boxed{\supseteq}$ יהי $v \in K'_\lambda$. אם $v = 0$, הוא נמצא בכל תת-מרחב, ולכן נניח $v \neq 0$. נבחר את ה-k הקטן ביותר שעבורו $(T-\lambda I)^k (v) = 0$, ונתבונן במסלול

$$E = \left\{(T-\lambda I)^{k-1}(v), \ldots, (T-\lambda I)(v), v\right\}$$

(הוא מסלול, לפי הבחירה של k). E בת"ל, $\dim V = n$, ולכן $k \leq n$. אם כן,

$$(T-\lambda I)^n (v) = (T-\lambda I)^{n-k}(T-\lambda I)^k (v) = (T-\lambda I)^{n-k}(0) = 0$$

2. לפי הסעיף הקודם,

$$V_\lambda = \{v \in V \mid T(v) = \lambda v\} = \{v \in V \mid (T-\lambda I)(v) = 0\} \subseteq K_\lambda$$

3. קודם נוכיח ש-K_λ אינווריאנטי תחת T. נשתמש בעובדה הבאה: האופרטורים T ו-$T-\lambda I$ מתחלפים, כלומר $(T-\lambda I)T = T^2 - \lambda T = T(T-\lambda I)$; לכן, גם כל חזקה של האחד מתחלפת עם חזקה של השני.

יהי $v \in K_\lambda$, ונוכיח $T(v) \in K_\lambda$.

$$(T-\lambda I)^n T(v) = T(T-\lambda I)^n (v) = T(0) = 0$$

עובדה כללית: אם $W \subseteq V$ תת-מרחב אינווריאנטי תחת T, ואם $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ פולינום כלשהו, אזי W אינווריאנטי גם תחת $p(T)$. נוכיח - יהי $v \in W$, ונסמן $p(T) = \alpha_0 I + \alpha_1 T + \cdots + \alpha_s T^s$. אזי

$$(p(T))(v) = \underbrace{\alpha_0 \underbrace{I(v)}_{\in W}}_{\in W} + \underbrace{\alpha_1 \underbrace{T(v)}_{\in W}}_{\in W} + \cdots + \underbrace{\alpha_s \underbrace{T^s(v)}_{\in W}}_{\in W}$$

בדרוש.

$\square$

למה 3. *1. יהיו $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ שני ערכים עצמיים שונים של T, ויהי $0 \neq v \in K_\lambda$. אזי*

$$K_\lambda \ni (T-\lambda I)(v) \neq 0$$

2. יהיו $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ שני ערכים עצמיים שונים של T. אזי $K_\lambda \cap K_\mu = \{0\}$.

הוכחה. 1. K_λ אינווריאנטי. ניקח $p(T) = T - \mu I$, ונקבל כי $(T-\mu I)(v) \in K_\lambda$. נוכיח $(T-\mu I)(v) \neq 0$.

נניח בשלילה כי $(T-\mu I)(v) = 0$, לכן $T(v) = \mu v$. ניתן לבדוק כי אם ניקח פולינום $f(x) \in \mathbb{F}[x]$, אזי $f(T)(v) = f(\mu) v$. נבחר $f(x) = (x-\lambda)^n$. אם כן, נציב את T ונקבל $f(T) = (T-\lambda I)^n$. מכאן קיבלנו

$$\underbrace{(T-\lambda I)^n (v)}_{=0} = \underbrace{(\mu-\lambda)^n v}_{\neq 0}$$

בסתירה, בדרוש.

2. נניח שקיים $v \in K_\lambda$, $v \in K_\mu$. נוכיח ש-$v = 0$.

נניח בשלילה ש-$v \neq 0$, ונתבונן בווקטורים הבאים:

$$\underbrace{v}_{\in K_\lambda, \neq 0}, \underbrace{(T-\mu I)(v)}_{\in K_\lambda, \neq 0}, \underbrace{(T-\mu I)^2(v)}_{\in K_\lambda, \neq 0}, \ldots, \underbrace{(T-\mu I)^n(v)}_{\in K_\lambda, \neq 0}$$

בסתירה להנחה שלפיה $v \in K_\mu$.

□

הגדרנו את המרחב העצמי המוכלל כגרעין של האופרטור $(T-\lambda I)^n$. כעת הגיוני שנסתכל גם על התמונה של האופרטור, ונראה מה הקשר ביניהם.

הגדרה 3. יהי $T : V \to V$ אופרטור לינארי, $0323imV = n$" , ויהי $\lambda \in \mathbb{F}$ ערך עצמי של T. נסמן

$$I_\lambda = \mathrm{im}\left[(T-\lambda I)^n\right]$$

למה 4. *1. I_λ תת-מרחב אינווריאנטי תחת T.*

2. $V = K_\lambda \oplus I_\lambda$.

<u>תזכורת:</u>
ניזכר במשפט הדרגה מלינארית 1 לצורך ההוכחה.
יהי $E : V \to V$ אופרטור לינארי, אזי $\dim V = \dim(\ker T) + \dim(\mathrm{im}\, T)$.

הוכחה. 1. כפי שציינו בהוכחת אחת הלמות הקודמות, T מתחלף עם $T - \lambda I$ ועם כל חזקה שלו. לכן, אם $v \in I_\lambda$, כלומר קיים $x \in V$ שעבורו $(T-\lambda I)^n(x) = v$, אזי

$$T(v) = T(T-\lambda I)^n(x) = (T-\lambda I)^n(T(x)) \in I_\lambda$$

2. נתחיל מלהוכיח ש-$K_\lambda \cap I_\lambda = \{0\}$, כלומר שהסכום ישר.

נניח ש-$v \in K_\lambda$, $v \in I_\lambda$. אזי קיים $x \in V$ שעבורו $v = (T-\lambda I)^n(x)$, ובן $(T-\lambda I)^n(v) = 0$. נקבל

$$(T-\lambda I)^{2n}(x) = 0 \Leftarrow x \in K_\lambda$$

לכן, $(T-\lambda I)^n(x) = 0$, ולכן $v = 0$, ומכאן אכן $K_\lambda \cap I_\lambda = \{0\}$.

כעת נרצה להוכיח שהסכום (הישר) אכן מכסה את המרחב כולו. לצורך כך, נסתכל על המימדים. ניקח $E = (T-\lambda I)^n$, ולפי התזכורת (משפט הדרגה להעתקות לינאריות),

$$\dim V = \dim K_\lambda + \dim I_\lambda = \dim(K_\lambda \oplus I_\lambda)$$

מתקיים $K_\lambda \oplus I_\lambda \subseteq V$, וכן $\dim V = \dim(K_\lambda \oplus I_\lambda)$ לכן $V = K_\lambda \oplus I_\lambda$.

□

למה 5. *אם $T : V \to V$ אופרטור נילפוטנטי, $n = \dim V$, אזי הפולינום האופייני של T הוא*

$$p_T(x) = x^n$$

הוכחה. $T^s = 0$, ולכן x^s הוא פולינום מאפס ל-T. לכן, $m_T(x) \mid x^s$, ז"א $m_T(x) = x^k$. אבל $p_T(x) \mid [m_T(x)]^n$, ולכן $p_T(x) \mid x^{kn}$, ובנוסף $\deg(p_T) = n$. לכן, $p_T(x) = x^n$.
□

מסקנה 6. *$\lambda = 0$ הוא ערך עצמי יחיד של כל אופרטור נילפוטנטי.*

שימו לב שאת המסקנה האחרונה ניתן להוכיח גם ללא המשפט, והמשפט ינבע ממנה.

למה 7. *יהי $T_0 = T|_{K_\lambda}$, $m = \dim K_\lambda$. אזי $p_{T_0}(x) = (x-\lambda)^n$. במילים אחרות, אם מצמצמים אופרטור למרחב עצמי מוכלל שלו, יש לו ערך עצמי יחיד, והוא λ.*

הוכחה. נתבונן באופרטור $T_0 - \lambda I : K_\lambda \to K_\lambda$. האופרטור $T_0 - \lambda I$ הוא אופרטור נילפוטנטי, כי $(T-\lambda I)^n = 0$ (זכרו שאנחנו במרחב העצמי המוכלל). לכן, הפולינום האופייני של $T_0 - \lambda I$ הוא $p_{T_0-\lambda I}(y) = y^m$ (לפי הלמה הקודמת). לפי ההגדרה,

$$y^m = p_{T_0-\lambda I}(y) = \det(yI - (T_0 - \lambda I)) = \det((y+\lambda)I - T_0)$$

נחליף את המשתנה: $x := y + \lambda$ (כלומר $y = x - \lambda$). נקבל

$$(x-\lambda)^m = \det(xI - T_0) = p_{T_0}(x)$$

כדרוש.

□

אחת הנקודות ש"דחקנו" הצידה היא מהו המימד של K_λ. בלמה הקודמת השתמשנו בו מבלי לקרוא לו בשם. נזכור כי המרחב העצמי המוכלל מכיל את המרחב העצמי, ולכן מימדו חייב להיות גדול (או שווה) לריבוי הגיאומטרי. בלמה הקרובה נראה כי המימד הוא בדיוק הריבוי האלגברי של λ.

למה 8. *$\dim K_\lambda$ שווה לריבוי האלגברי של λ.*

הוכחה. נסמן B ו-B' בסיסים של K_λ ושל I_λ בהתאמה. נגדיר $\tilde{B} = B \cup B'$ (איחוד זר), $\tilde{B}$ בסיס של V. אם כן,

$$[T]_{\tilde{B}} = \begin{pmatrix} [T]_B & 0 \\ 0 & [T]_{B'} \end{pmatrix}$$

ולכן $p_T(x) = p_{T|_{K_\lambda}}(x) \cdot p_{T|_{I_\lambda}}(x)$. לכן, לפי הלמה הקודמת, אם נסמן $m = \dim K_\lambda$, נקבל

$$p_T(x) = p_{T|_{K_\lambda}}(x) \cdot p_{T|_{I_\lambda}}(x) = (x-\lambda)^m \cdot p_{T|_{I_\lambda}}(x)$$

נותר להוכיח ש-λ איננו שורש של $p_{T|_{I_\lambda}}(x)$. אנו יודעים כי $\{0\} \subseteq V_\lambda \subseteq K_\lambda \subseteq V$, והוכחנו כי $K_\lambda \cap I_\lambda = \{0\}$. לכן, גם $V_\lambda \cap I_\lambda = \{0\}$. כלומר, אין וקטור עצמי הקשור ל-λ ב-I_λ, ומכאן ששום ערך עצמי של האופרטור $T|_{I_\lambda}$ איננו שווה ל-λ. לכן, $(x-\lambda)$ אינו מחלק את הפולינום האופייני $p_{T|_{I_\lambda}}(x)$.

אם כן, m הוא הריבוי האלגברי של λ, כדרוש.

□

כזכור, בתחילת הנושא אמרנו שאנו רוצים לפרק את המרחב שלנו לסכום ישר של תתי-מרחבים אינווריאנטיים, וכך המטריצה המייצגת תהיה אלכסונית בלוקים. המשפט שנוכיח כעת יציג את הפירוק, ובפרק הבא, שבו נגיע לצורה הסופית, נמצא בחירה מתאימה של בסיסים, שבה הבלוקים יהיו מצורה מסוימת.

משפט 9 (פירוק למרחבים עצמיים מוכללים). *נניח שהפולינום האופייני $p_T(x)$ של אופרטור לינארי $T: V \to V$ מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים מעל שדה $\mathbb{F}$. יהיו $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{F}$ הערכים העצמיים השונים של T. אזי*

$$V = K_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus K_{\lambda_s}$$

סכום ישר של תתי-מרחבים אינווריאנטיים.

הוכחה. רוב העבודה תהיה להוכיח שהסכום באגף ימין אכן ישר. נוכיח זאת באמצעות אינדוקציה על מספר המחוברים. עבור $s = 1$ אין מה להוכיח.

בסיס האינדוקציה עבור $s = 2$ - הוכחנו.

צעד האינדוקציה נניח שידוע שהסכום

$$K_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus K_{\lambda_i}$$

הוא ישר, ונוכיח שהסכום של

$$K_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus K_{\lambda_{i+1}}$$

ישר גם כן.

צריך להוכיח כי

$$(K_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus K_{\lambda_i}) \cap K_{\lambda_{i+1}} = \{0\}$$

יהי $v \in K_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus K_{\lambda_i}$, $v \in K_{\lambda_{i+1}}$. אם כן, $v = v_1 + \cdots + v_i$, כאשר לכל $j = 1, \ldots, i$, מתקיים $v_j \in K_{\lambda_j}$.

נפעיל את האופרטור $(T - \lambda_{i+1} I)^n$ על v. נקבל:

$$0 = (T - \lambda_{i+1} I)^n (v) = (T - \lambda_{i+1} I)^n (v_1 + \cdots + v_i) =$$

$$= \underbrace{(T - \lambda_{i+1} I)^n (v_1)}_{\in K_{\lambda_1}} + \cdots + \underbrace{(T - \lambda_{i+1} I)^n (v_i)}_{\in K_{\lambda_i}}$$

לפי הנחת האינדוקציה, הסכום

$$K_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus K_{\lambda_i}$$

הוא ישר, ולכן ההצגה של 0 כסכום איברי $K_{\lambda_1}, \ldots, K_{\lambda_s}$ היא יחידה, ולכן לכל $j = 1, \ldots, i$, מתקיים

$$(T - \lambda_{i+1} I)^n (v_j) = 0$$

מכאן שלכל $j = 1, \ldots, i$ מתקיים $v_j \in K_{\lambda_{i+1}}$, אבל גם $v_j \in K_{\lambda_j}$. $\lambda_j \neq \lambda_{i+1}$, ולכן $v_j = 0$. בסך הכל, $v = 0$.

לכן הסכום ישר. כעת צריך להוכיח שהסכום (הישר) הוא אכן כל V. ניעזר בלמה הקודמת, ונקבל:

$$\dim (K_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus K_{\lambda_s}) = \dim K_{\lambda_1} + \cdots + \dim K_{\lambda_s} = k_1 + \cdots + k_s$$

לפי ההנחה, הפולינום האופייני מתפרק לגורמים לינאריים, ולכן

$$k_1 + \cdots + k_s = \deg(p_T) = n = \dim V$$

בסך הכל, $K_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus K_{\lambda_s} \subseteq V$ וגם $\dim(K_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus K_{\lambda_s}) = \dim V$, ולכן

$$V = K_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus K_{\lambda_s}$$

כדרוש.

$\square$