1 סכום ישר של תתי-מרחבים אינווריאנטיים

בעת ננסה לראות מה קורה אם אנו מפרקים את המרחב לתתי-מרחבים אינווריאנטיים, ומסתכלים על מטריצה מייצגת של אופרטור. כך יתחברו שלושה מושגים שלמדנו לאחרונה - מטריצה אלכסונית בלוקים, סכום ישר ומרחבים אינווריאנטיים.

למה 1. *יהי $T: V \to V$ אופרטור לינארי.*

1. *יהי $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_k$ סכום ישר של תתי-מרחבים אינווריאנטיים. יהי B_i בסיס של U_i לכל $i = 1, \ldots, k$. נסמן $B = B_1 \cup \cdots \cup B_k = \bigcup_{i=1}^{k} B_i$. אזי*

$$[T]_B = \begin{pmatrix} [T]_{B_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & [T]_{B_k} \end{pmatrix}$$

2. *אם B בסיס של V, ואם*

$$[T]_B = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_1 \end{pmatrix}$$

אזי אפשר לחלק את B לאיחוד זר $B = B_1 \cup \cdots \cup B_k$, כך ש-$\operatorname{Span}(B_i) = U_i$ לכל $i = 1, \ldots, k$ (העובדה ש-$V = \oplus U_1 \oplus \cdots \oplus U_k$ נובעת מהאיחוד של B_i).

הוכחה. 1. עבור $k = 1$ אין מה להוכיח. נניח ש-$k \geq 2$, ונשתמש באינדוקציה לפי k.

בסיס האינדוקציה $k = 2$. כלומר, $V = U_1 \oplus U_2$, B_1 בסיס ל-U_1 ו-B_2 בסיס ל-U_2. נסמן $B_1 = \{v_1, \ldots, v_r\}$ ו-$B_2 = \{u_1, \ldots, u_s\}$. אזי

$$B = B_1 \cup B_2 = \{v_1, \ldots, v_r, u_1, \ldots, u_s\}$$

נחשב את $[T]_B$.
U_1 תת-מרחב אינווריאנטי, ולכן לכל $i = 1, \ldots, r$, $T(v_i) \in U_1$, ומכאן

$$[T(v_i)]_B = \begin{pmatrix} [T(v_i)]_{B_1} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} r \\ s \end{matrix}$$

באופן דומה, לכל $j = 1, \ldots, s$,

$$[T(u_j)]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ [T(u_j)]_{B_2} \end{pmatrix} \begin{matrix} r \\ s \end{matrix}$$

בסך הכל, קיבלנו שמתקיים

$$[T]_B = \left([T(v_1)]_B, \ldots, [T(u_s)]_B\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} [T(v_1)]_{B_1} \cdots [T(v_r)]_{B_1} & 0 \\ \hline 0 & [T(u_1)]_{B_2} \cdots [T(u_s)]_{B_2} \end{array}\right)$$

צעד האינדוקציה נניח כי $V=(U_1\oplus\cdots\oplus U_{k-1})\oplus U_k$, וכן $B=\bigcup_{i=1}^k B_i$. לפי המקרה $k=2$ שהוכחנו,

$$[T]_B=\left(\begin{array}{c|c}[T]_{B_1\cup\cdots\cup B_{k-1}} & 0\\ \hline 0 & B_k\end{array}\right)\overset{\text{hypothesis}}{=}\begin{pmatrix}[T]_{B_1} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & [T]_{B_k}\end{pmatrix}$$

כדרוש.

2. נתונה המטריצה המייצגת

$$[T]_B=\begin{pmatrix}A_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & A_1\end{pmatrix}$$

יחסית לבסיס B כלשהו.

עבור $k=1$ אין מה להוכיח. נניח $k\geq 2$, ונשתמש באינדוקציה לפי k.

בסיס האינדוקציה $k=2$, כלומר

$$[T]_B=\left(\begin{array}{c|c}A_1 & 0\\ \hline 0 & A_2\end{array}\right)$$

נניח $A_1\in M_r(\mathbb{F})$ ו-$A_2\in M_s(\mathbb{F})$. נסמן את איברי B כך:

$$B=\{v_1,\ldots,v_r,u_1,\ldots,u_s\}$$

ונגדיר $B_1=\{v_1,\ldots,v_r\}$, $B_2=\{u_1,\ldots,u_s\}$, $U_1=\mathsf{Span}(B_1)$ וכן $U_2=\mathsf{Span}(B_2)$. אזי:

$$\left([T(v_1)]_B\ \cdots\ [T(v_r)]_B\ \ [T(u_1)]_B\ \cdots\ [T(u_s)]_B\right)=[T]_B=$$

$$=\left(\begin{array}{c|c}A_1 & 0\\ \hline 0 & A_2\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c}A_1e_1\cdots A_1e_r & 0\\ \hline 0 & A_2e_1\cdots A_2e_s\end{array}\right)$$

אם כן, על פי שוויון כל עמודה, לכל $i=1,\ldots,r$, $[T(v_i)]_B=A_1e_i$, וכן לכל $j=1,\ldots,s$, $[T(u_j)]_B=A_2e_j$.

כלומר, לכל $v_i\in B_1$, מתקיים $T(v_i)\in\mathsf{Span}(B_1)=U_1$, ולכן לכל $v\in U_1$ מתקיים $T(v)\in U_1$, זאת אומרת ש-U_1 תת-מרחב אינווריאנטי. באופן דומה, גם U_2 אינווריאנטי, כדרוש.

צעד האינדוקציה נתונה המטריצה המייצגת

$$[T]_B=\begin{pmatrix}A_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & A_k\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c|c}\tilde{A} & 0\\ \hline 0 & A_k\end{array}\right)$$

מהמקרה $k=2$ שהוכחנו, נקבל חלוקה של B לאיחוד זר $B=\tilde{B}\cup B_k$, כך ש-$\tilde{U}=\mathsf{Span}\,\tilde{B}$ ו-$U_k=\mathsf{Span}(B_k)$ הם תתי-מרחבים אינווריאנטיים. לפי הנחת האינדוקציה, נחלק את $\tilde{B}$ לאיחוד זר, $\tilde{B}=B_1\cup\cdots\cup B_{k-1}$, שעבורו $U_i=\mathsf{Span}(B_i)$ תתי-מרחבים אינווריאנטיים לכל $i=1,\ldots,k-1$, כדרוש.

$\square$

מהמשפט הזה נגיע למספר מסקנות חשובות.

מסקנה 2. *אם B בסיס של V כך ש-$[T]_B$ אלכסונית בלוקים,*

$$[T]_B = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k \end{pmatrix}$$

אזי לכל $\sigma \in S_k$ קיים בסיס B' של V שעבורו

$$[T]_{B'} = \begin{pmatrix} A_{\sigma(1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{\sigma(k)} \end{pmatrix}$$

הוכחה. מהחלק השני של הלמה הקודמת, קיימת חלוקה של B ל-k חלקים זרים, כך שהמטריצה המייצגת תהיה

$$[T]_B = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k \end{pmatrix}$$

נסדר את החלקים $B' = B_{\sigma(1)} \cup \cdots \cup B_{\sigma(k)}$. לפי החלק הראשון של הלמה, נקבל

$$[T]_{B'} = \begin{pmatrix} A_{\sigma(1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{\sigma(k)} \end{pmatrix}$$

$\square$

מסקנה 3. *שתי מטריצות אלכסוניות בעלות אותן בלוקים בסדר שונה דומות זו לזו; לכל $\sigma \in S_k$,*

$$\begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A_{\sigma(1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{\sigma(k)} \end{pmatrix} =$$

הוכחה. שתי המטריצות הן מייצגות של אותו אופרטור T יחסית לבסיסים שונים.

$\square$

נזכיר כי ברצוננו למצוא לכל אופרטור בסיס, שבו המטריצה המייצגת תהיה מצורה מסוימת (שקול: לכל מטריצה למצוא מטריצה דומה מהצורה הזו). כעת ברור שאם נצליח לפרק את המרחב שלנו לתתי–מרחבים אינווריאנטיים, אזי נוכל להגיע לצורה אלכסונית בלוקים. בחלק הבא, לאחר הלמה שנוכיח מיד, נמצא את המרחבים האלו, ולאחר מכן נראה מהם הבלוקים.

למה 4. *יהי $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_k$ סכום ישר של תתי-מרחבים אינווריאנטיים תחת האופרטור הלינארי $T : V \to V$. אזי מתקיים:*

1. $\ker T=\ker T|_{U_1}\oplus\cdots\oplus\ker T|_{U_k}$
2. $\operatorname{im} T=\operatorname{im} T|_{U_1}\oplus\cdots\oplus\operatorname{im} T|_{U_k}$

הוכחה. כל $v\in V$ ניתן להצגה בצורה $v=u_1+\cdots+u_k$, כאשר $u_i\in U_i$ לכל $i=1,\ldots,k$. לכן, $T\left(v\right)=T\left(u_1\right)+\cdots+T\left(u_k\right)$. לכן $w=w_1+\cdots+w_k$, כאשר לכל $i=1,\ldots,k$, מתקיים $w_i\in U_i$ כי U_i אינווריאנטי.

$$u_i\in\ker T|_{U_i}\Leftrightarrow\left(i=1,\ldots,k\right)w_i=0\Leftrightarrow w=0\Leftrightarrow T\left(v\right)=0\Leftrightarrow v\in\ker T$$

$$w_i\in\operatorname{im} T|_{U_i}\Leftrightarrow w\in\operatorname{im} T$$

שני הסכומים הם ישרים, כי המחוברים הם תתי-מרחבים של U_i.

□