1 מטריצות אלכסוניות בלוקים

אנו עוברים לנושא הבא, שבו ננסה למצוא צורה שלישית שלה דומות מטריצות. כדי להבין מהי הצורה הזו, נצטרך להגדיר את המושג הבא:

הגדרה 1. מטריצה מהצורה

$$\begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{A_k} \end{pmatrix}$$

כאשר $A_1, \ldots, A_k$ מטריצות ריבועיות מגודל $n_1, \ldots, n_k$ בהתאמה, נקראת **מטריצה אלכסונית בלוקים**. גודלה $n \times n$, כאשר $n = n_1 + \cdots + n_k$.

הצורה השלישית שנראה תהיה מטריצה אלכסונית בלוקים, כשהבלוקים יהיו מטריצות מסוימות, הייחודיות לכל מטריצות (עד כדי דמיון).

הגדרנו מטריצות אלכסוניות בלוקים, ובעת ננסה לראות האם נוכל למצוא לה פולינום אופייני ומינימלי מבלי להתחיל לחשב אותם בכל פעם מחדש.

טענה 1. *תהי A מטריצה אלכסונית בלוקים. אזי:*

1.
$$p_A(x) = p_{A_1}(x) \ldots p_{A_k}(x)$$

2.
$$m_A(x) = \text{lcm}\left\{m_{A_1}(x), \ldots, m_{A_k}(x)\right\}$$

<u>תזכורת:</u>

למספרים טבעיים, $\text{lcm}\left\{a_1, \ldots, a_k\right\} = \min\left\{M \mid a_1|M, \ldots, a_k|M\right\}$.

לפולינומים, זהו הפולינום המתוקן מהמעלה הקטנה ביותר מהקבוצה $\left\{g \in \mathbb{F}[x] \mid f_1|g, \ldots, f_k|g\right\}$.

הוכחה. נסמן $p_{A_i}(x) = p_i(x)$, $m_{A_i}(x) = m_i(x)$.

החלק הראשון על הפולינום האופייני קל לחישוב ישירות, על ידי דטרמיננטה של מטריצת בלוקים. אם כן, נוכיח רק את החלק השני.

לפי משפט קודם,

$$m_1(x)\,|p_1(x)\,|\left[m_1(x)\right]^n, \cdots, m_k(x)\,|p_k(x)\,|\left[m_k(x)\right]^n$$

נסמן $g(x) = \text{lcm}\left\{m_{A_1}(x), \ldots, m_{A_k}(x)\right\}$. נוכיח $m_A = g$ לפי השלבים הבאים:

1. אם $f \in \mathbb{F}[x]$ פולינום כלשהו, אזי

$$f(A) = \begin{pmatrix} \boxed{f(A_1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{f(A_k)} \end{pmatrix}$$

זה נכון מפני שמתקיים:

(א)

$$A^{\ell}=\begin{pmatrix}\boxed{A_1^{\ell}} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{A_k^{\ell}}\end{pmatrix}$$

(ב)

$$\alpha A=\begin{pmatrix}\boxed{\alpha A_1} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{\alpha A_k}\end{pmatrix}$$

(ג) אם $A,\tilde{A}$ שתי מטריצות אלכסוניות בלוקים כשהבלוקים מאותו גודל (מטריצות מאותו מבנה), אזי

$$A+\tilde{A}=\begin{pmatrix}\boxed{A_1+\tilde{A}_1} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{A_k+\tilde{A}_k}\end{pmatrix}$$

2. אם $f(A)=0$, אזי $f(A_i)=0$ לכל $i=1,\dots,k$.

3. $m_A(A_i)=0$ לכל $i=1,\dots,k$ (לפי השלב הקודם).

4. לכל $i=1,\dots,k$, מתקיים $m_i|m_A$. נימוק: נשתמש בחילוק עם שארית.
$m_A=q\cdot m_i+r$, כאשר $\deg(r)<\deg(m_i)$ או $r=0$. נציב A_i, ונקבל $m_A(A_i)=q(A_i)\cdot m_i(A_i)+r(A_i)$, כלומר $0=q(A_i)\cdot 0+r(A_i)$, ומכאן $r(A_i)=0$. לכן, אם $\deg(r)<\deg(m_i)$, נקבל סתירה למינימליות של m_i, כלומר $r=0$.

5. אם כן, $g|m_A$, כי g הוא lcm.

6. עם זאת, $g(A_i)=0$ לכל $i=1,\dots,k$, כי לכל i, מתקיים $m_i(A_i)=0$, וכן ידוע $m_i|g$.

7. לכן, $g(A)=0$.

8. אם כן, $g|m_A$.

9. מ-5, מ-8 ומהעובדה ששני הפולינומים מתוקנים, נקבל $g=m_A$, כדרוש.

$\square$