1 פולינומים של מטריצות

הגדרה 1. יהי $f\in\mathbb{F}\left[x\right]$, $f=a_{0}+a_{1}x+\cdots+a_{n}x^{n}$ ($\forall i=0,\ldots,n:a_{i}\in\mathbb{F}$). תהי $A\in M_{k}\left(\mathbb{F}\right)$ מטריצה ריבועית. נגדיר את **הערך של** f **במטריצה** A באופן הבא:

$$f\left(A\right)=a_{0}I_{k}+a_{1}A+\cdots+a_{n}A^{n}$$

חשוב לשים לב שהצבת מטריצה בפולינום מחזירה מטריצה ולא סקלר.

הגדרה 2. תהי $A\in M_{k}\left(\mathbb{F}\right)$. אומרים ש-$f\in\mathbb{F}\left[x\right]$ הוא **פולינום מאפס** ל-A, אם $f\neq0$ וגם $f\left(A\right)=0$. במילים, פולינום מאפס הוא פולינום (שונה מאפס) שהצבת המטריצה A בו מחזירה את מטריצת האפס.

משפט 1. *לכל מטריצה* $A\in M_{k}\left(\mathbb{F}\right)$ *קיים פולינום מאפס.*

הוכחה. נתבונן במרחב הווקטורי $V=M_{k}\left(\mathbb{F}\right)$, $\dim V=k^{2}=\ell$. נתבונן בקבוצה של איברי V הבאה: $\left\{ I,A,A^{2},\ldots,A^{\ell}\right\}$.

בקבוצה הזו יש $\ell+1$ איברים, אך המימד של V הוא ℓ, ומכאן שהיא תלויה לינארית. לכן, קיימים סקלרים $a_{0},a_{1},\ldots,a_{\ell}\in\mathbb{F}$ (לא כולם שווים אפס), כך שמתקיים

$$a_{0}I+a_{1}A+\cdots+a_{\ell}A^{\ell}=0$$

נגדיר פולינום $f\in\mathbb{F}\left[x\right]$, $f=a_{0}+a_{1}x+\cdots+a_{n}x^{n}$. עבורו $f\neq0$ (כי לא כל הסקלרים הם אפס), וכן $f\left(A\right)=0$ (לפי הבנייה), כדרוש.

$\square$

דוגמה 1. נראה שתי דוגמאות לפולינומים מאפסים.

1. עבור $A=I_{k}$, נסתכל על $f=x-1$. באופן ברור $f\neq0$, וכן $f\left(A\right)=A-1\cdot I_{k}=I_{k}-I_{k}=0$. כלומר, f פולינום מאפס ל-A.

2. עבור
$$A=\begin{pmatrix}\lambda_{1} & 0\\ 0 & \lambda_{2}\end{pmatrix}$$
נסתכל על הפולינום האופייני $f=p_{A}\left(x\right)=\det\left(xI-A\right)=\left(x-\lambda_{1}\right)\left(x-\lambda_{2}\right)$.
נציב את A:
$$f\left(A\right)=A^{2}-\left(\lambda_{1}+\lambda_{2}\right)A+\lambda_{1}\lambda_{2}I=$$
$$=\begin{pmatrix}\lambda_{1}^{2} & 0\\ 0 & \lambda_{2}^{2}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda_{1}^{2}+\lambda_{1}\lambda_{2} & 0\\ 0 & \lambda_{2}^{2}+\lambda_{1}\lambda_{2}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda_{1}\lambda_{2} & 0\\ 0 & \lambda_{1}\lambda_{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=0$$

הדוגמה האחרונה מעניינת. נשאלת השאלה האם זהו צירוף מקרים, שהפולינום האופייני הוא מאפס של המטריצה, או שזה נכון רק למטריצות אלכסוניות (ואולי אפילו ללכסינות?). התשובה נתונה במשפט הבא, המוכיח שזה נכון תמיד.

משפט 2 (משפט קאלי-המילטון, Cayley-Hamilton)**.** $p_{A}\left(A\right)=0$.

<u>תזכורת:</u>

בהוכחת המשפט ניעזר במושג מהקורס לינארית 1: המטריצה הנלווית הקלאסית הינה $\left[\text{adj }A\right]_{ij}=\left(-1\right)^{i+j}\det M_{ji}$, כאשר M_{ji} הוא המינור ה-ji - מורידים מהמטריצה A את השורה ה-j ואת העמודה ה-i.

אחד המשפטים החשובים לגבי המטריצה הנלווית הינו $A\cdot\text{adj }A=\det\left(A\right)\cdot I$.

הוכחה. תהי $A\in M_n(\mathbb{F})$. נתבונן במטריצה xI_n-A. לפי התזכורת הנ"ל, מתקיים

$$(xI_n-A)\cdot\mathsf{adj}\,(xI_n-A)=\mathsf{det}\,(xI_n-A)\cdot I$$

נציג את הביטוי באגף שמאל בצורה הבאה:

$$\mathsf{adj}\,(xI-A)=B_0+B_1x+\cdots+B_nx^n$$

נשים לב שלפי הגדרת המטריצה הנלווית, כל הדטרמיננטות הן של מטריצות מגודל $(n-1)\times(n-1)$. אם כן, $B_n=0$; החזקה הגבוהה ביותר ש-x יופיע בה היא $n-1$. נחזור למשוואה. נקבל

$$(xI-A)\left(B_0+B_1x+\cdots+B_nx^n\right)=\mathsf{det}\,(xI-A)\cdot I$$

נסמן $p_A(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$. נתבונן במקדמים בכל אגף:

	x^n	x^{n-1}	$\cdots$	x^2	x^1	x^0
שמאל	B_{n-1}	$B_{n-2}-AB_{n-1}$	$\cdots$	B_1-AB_2	B_0-AB_1	$-AB_0$
ימין	I	$a_{n-1}I$	$\cdots$	a_2I	a_1I	a_0I

יש שוויון בכל עמודה בין השורות, כי אלו מקדמים של אותן חזקות. אם נציב A בשני האגפים, עדיין נקבל שוויון. אם כן, נסתכל לפי החזקות:

שמאל	A^nB_{n-1}	$A^{n-1}B_{n-2}-A^nB_{n-1}$	$\cdots$	$A^2B_1-A^3B_2$	$AB_0-A^2B_1$	$-AB_0$
ימין	A^n	$a_{n-1}A^{n-1}$	$\cdots$	a_2A^2	a_1A	a_0I

נשים לב כי אם נסכום את השורות, יהיה שוויון. הסכום של השורה העליונה (אגף שמאל) מתאפס, ואילו הסכום של השורה התחתונה (אגף ימין) הינו $p_A(A)$.

בסך הכל, $p_A(A)=0$.

$\square$

הערה 1. לכאורה, ניתן להוכיח את המשפט באופן הבא: נסתכל על $p_A(x)=\mathsf{det}\,(xI-A)$, ונציב A. נקבל

$$p_A(A)=\mathsf{det}\,(AI-A)=\mathsf{det}\,(0)=0$$

נציג שני נימוקים שבגללם הוכחה זו נכשלת.

הנימוק האחד הוא שהמטריצה xI אינה סתם הכפלה של I בסקלר; היא מסמלת מטריצה שעל האלכסון הראשי שלה מופיע x, ובשאר המקומות אפס. אם כן, הצבת A במקום x תאמר שהמטריצה AI מסמלת מטריצה שבה A על האלכסון בבלוקים ובשאר אפסים? החיסור לא יוגדר!

הנימוק השני הוא טכני – כפי שהוגדר, כשמציבים מטריצה בפולינום, מתקבלת מטריצה. עם זאת, בשיטה זו קיבלנו מספר...