1 שילוש מטריצות

סיימנו לדבר על לכסון מטריצות; הקריטריונים שבידינו ללכסון מטריצות הם רחבים ומספקים. עם זאת, ראינו שלא תמיד ניתן ללכסן מטריצות - למשל, ראינו את בלוק ז'ורדן. נרצה לדבר על מושג "חלש" יותר מלכסון, כזה שיהיה גם למטריצות שאינן לכסינות וגם למטריצות לכסינות. ואם לא מטריצה אלכסונית, אז ננסה משולשת (=משולשית):

הגדרה 1. אומרים ש-A **ניתנת לשילוש** אם קיימת מטריצה הפיכה P כך ש-$P^{-1}AP$ מטריצה משולשת. המטריצה P נקראת **המטריצה המשלשת**.

בהגדרה של שילוש מטריצות לא ציינו האם המטריצה $P^{-1}AP$ משולשת עליונה או תחתונה. מסתבר שאין הבדל:

הערה 1. אם C מטריצה משולשת עליונה, אזי C דומה למטריצה משולשת תחתונה.

הוכחה. נגדיר את המטריצה

$$P=\begin{pmatrix}0 & & 1\\ & \cdots & \\ 1 & & 0\end{pmatrix}$$

(בלומר, 1-ים על האלכסון המקיים $i+j=n+1$, ובשאר אפסים).
קל לבדוק כי $P^2=I$, ולכן $P^{-1}=P$.
נסתכל על $P^{-1}CP$. מתקיים

$$\begin{pmatrix}0 & & 1\\ & \cdots & \\ 1 & & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_{11} & & \star\\ & \ddots & \\ 0 & & c_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & & 1\\ & \cdots & \\ 1 & & 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0 & & c_{nn}\\ & \cdots & \\ c_{11} & & \star\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & & 1\\ & \cdots & \\ 1 & & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{nn} & & 0\\ & \ddots & \\ \star & & c_{11}\end{pmatrix}$$

.

□

הגדרנו שילוש מטריצות, והמטרה הייתה להחליש את הדרישות של לכסון; שיהיו בידינו יותר מטריצות שניתן לשלש מאשר ללכסן. המשפט הבא יראה לנו שהקריטריון לשילוש יחסית חלש, כלומר מטריצות רבות מקיימות אותו.

משפט 1. *מטריצה A ניתנת לשילוש אם ורק אם $p_A(x)$ מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים.*

הוכחה. $\boxed{\Leftarrow}$ נניח ש-A ניתנת לשילוש, זאת אומרת $A\sim C$, כאשר C משולשת. אזי,

$$p_A(x)=p_C(x)=\det(xI-C)=\det\begin{pmatrix}x-c_{11} & & \star\\ & \ddots & \\ 0 & & x-c_{nn}\end{pmatrix}=\prod_{j=1}^{n}(x-c_{jj})$$

בדרוש.

$\boxed{\Rightarrow}$ נניח ש-$p_A(x)$ מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים.

יהי $(x-\lambda)$ אחד מהגורמים, כאשר λ ע"ע של A. יהי v ו"ע של A הקשור ל-λ.

נשלים את הקבוצה $\{v\}$ לבסיס B של $\mathbb{F}^n$, נסמן $B=\{v,v_2,\ldots,v_n\}$. נסמן ב-P את מטריצת המעבר בין הבסיסים (הסטנדרטי ו-B). אזי יחסית לבסיס B נקבל:

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda & \star & \cdots & \star\\ 0 & & & \\ \vdots & & \tilde{A} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}=A_1$$

לבן, $p_A(x)=p_{A_1}(x)=(x-\lambda)\cdot p_{\tilde{A}}(x)$.

אם כן, $p_{\tilde{A}}(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים. נשלים את ההוכחה באינדוקציה.

עבור $n=1$ אין מה להוכיח.

נניח שהמשפט נכון ל-$n-1$, ונוכיח ל-n. בסימונים הנ"ל, $\tilde{A}$ ניתנת לשילוש, כלומר קיימת Q כך ש-$Q^{-1}\tilde{A}Q$ משולשת.

נגדיר

$$C=P\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & Q\end{pmatrix}$$

אזי

$$C^{-1}AC=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & Q\end{pmatrix}^{-1}P^{-1}AP\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & Q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & Q^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & \star\\ 0 & \tilde{A}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & Q\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda & \star\\ 0 & Q^{-1}\tilde{A}Q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda & & & \star\\ & \star & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \star\end{pmatrix}$$

בדרוש.

□

הערה 2 (אלגוריתם לשילוש מטריצה). תהי מטריצה $A\in M_n(\mathbb{F})$, כך ש-$p_A(x)$ מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים.

1. נמצא לכל ערך עצמי λ בסיס למרחב העצמי, ונסמן את איחוד הבסיסים האלו ב-$\tilde{B}$. נסמן $k=\left|\tilde{B}\right|$.
2. נשלים אותו לבסיס B של V.
3. נסמן ב-P את המטריצה שעמודותיה הן הווקטורים של B, ונחשב את $\tilde{A}_2=P^{-1}AP$.
4. אם $\tilde{A}_2$ משולשת, עוברים לשלב הבא.

   אחרת, נסמן ב-A_2 את המטריצה המתקבלת מ-$\tilde{A}_2$ על ידי מחיקת k השורות והעמודות הראשונות, ונפעיל עליה את האלגוריתם עד שנקבל מטריצה משלשת P_1.
5. נסמן $P'=\begin{pmatrix}I_k & 0\\ 0 & P_1\end{pmatrix}$. אזי $(P')^{-1}P^{-1}APP'$ משולשת עליונה.