1 הריבוי האלגברי והריבוי הגיאומטרי

בעת נחזור לתיאוריה של מטריצות ושל אופרטורים. ההגדרה הבאה תוגדר עבור אופרטורים, אך הגדרה זהה נכונה גם לגבי מטריצות, ולא נצטט אותה כאן:

הגדרה 1. יהי $\lambda \in \mathbb{F}$ ע"ע של אופרטור לינארי $T : V \to V$.
הריבוי האלגברי k של λ הוא החזקה הגדולה ביותר $(x-\lambda)^k$, כך שמתקיים $(x-\lambda)^k | p_T(x)$ (במילים, אם מפרקים את הפולינום האופייני לגורמים לינאריים, הריבוי האלגברי הוא החזקה של הגורם $x-\lambda$).
הריבוי הגיאומטרי m של λ הוא $m = \dim V_\lambda(T)$ (במילים, זהו המספר הגדול ביותר של וקטורים עצמיים הקשורים ל-λ שהם בלתי תלויים לינארית).

הערה 1. לכל $\lambda \in \mathbb{F}$,

1. $1 \le k_\lambda \le n$

הוכחה. (א) $1 \le k_\lambda$ כי λ שורש של הפולינום האופייני.
(ב) $k_\lambda \le n$ על פי השוואת דרגות.

□

2. $1 \le m_\lambda \le n$

הוכחה. (א) $1 \le m_\lambda$ כי λ ע"ע, ולכן קיים $0 \ne v \in V_\lambda(T)$.
(ב) $m_\lambda \le n$ כי $V_\lambda(T)$ תת-מרחב של V.

□

בעת ננסה להבין מה היחס בין הריבויים של ע"ע, האלגברי והגיאומטרי. הכוונה - האם הם שווים, ואם לא - מי גדול יותר.

משפט 1. *לכל $\lambda \in \mathbb{F}$ ע"ע של אופרטור לינארי $T : V \to V$, מתקיים $1 \le m_\lambda \le k_\lambda \le n$.*

הוכחה. נתבונן ב-$V_\lambda(T)$, ונסמן $m = m_\lambda = \dim V_\lambda(T)$. נבחר בסיס $\{v_1, \ldots, v_m\}$ של $V_\lambda(T)$. אם $m < n$, נשלים את הבסיס הזה לבסיס B של V: $\{v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_n\}$. תהי $A = [T]_B$. מתקיים:

$$T(v_1) = \lambda v_1, \cdots, T(v_m) = \lambda v_m, T(v_m + 1) = ?, \cdots, T(v_n) = ?$$

אם כן, המטריצה A הינה מהצורה

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & & 0 & \\ & \ddots & & A_2 \\ 0 & & \lambda & \\ \hline & 0 & & A_1 \end{array}\right)$$

נסתכל על הפולינום האופייני של T:

$$p_T(x) = p_A(x) = \det(xI - A) = \det \left(\begin{array}{ccc|c} x-\lambda & & 0 & \\ & \ddots & & -A_2 \\ 0 & & x-\lambda & \\ \hline & 0 & & xI - A_1 \end{array}\right) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} x-\lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x-\lambda \end{pmatrix} \det(xI - A) = (x-\lambda)^m g(x)$$

אם כן, $k_\lambda \geq m = m_\lambda$.

$\square$

הערה 2. יש מקרים שבהם $m_\lambda < k_\lambda$. למשל - בלוק ז'ורדן; עבור $J_n(\lambda)$, ראינו כי $m_\lambda = 1$, אבל $k_\lambda = n$.

בהמשך ננסה להבין מתי לכל ע"ע הריבויים שווים, ונגלה כי הם שווים אם ורק אם המטריצה לכסינה.

בעת נמצא קריטריון ללכסינות, המסתמך על הריבויים האלגברי והגיאומטרי של הערכים העצמיים של המטריצה (או האופרטור). ניזכר בדוגמה של בלוק ז'ורדן; הוא לא היה לכסין, מפני שלא היו מספיק וקטורים עצמיים הקשורים לערך העצמי λ. אם כן, נרצה שלכל ערך עצמי יהיו מספיק וקטורים עצמיים, ואת זאת נביע במשפט הבא:

משפט 2. *נניח ש-$p_A(x)$ מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים. אזי A לכסינה אם ורק אם לכל ע"ע λ של A, הריבוי הגיאומטרי m_λ שווה לריבוי האלגברי k_λ.*

הוכחה. $\boxed{\Leftarrow}$ נניח ש-A לכסינה. אזי למרחב $\mathbb{F}^n$ יש בסיס $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ המורכב מו"ע של A. נחלק את B ל-s תתי קבוצות, לפי הע"ע השונים $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$, ונסמנן $B_1, \ldots, B_s$. לכל λ_i נסמן ב-m_i את הריבוי הגיאומטרי שלו וב-k_i את הריבוי האלגברי שלו. נתבונן בסכום $m_1 + \cdots + m_s = ?$. מתקיים

$$m_1 + \cdots + m_s = \dim V_{\lambda_1} + \cdots + \dim V_{\lambda_s} \geq |B_1| + \cdots + |B_s| = n$$

מצד שני, $k_1 + \cdots + k_s = \deg p_A(x) = n$.

כמו כן, $k_i \geq m_i$ לכל $i = 1, \ldots, s$.

אם כן, עד כה ידוע כי $n = k_1 + \cdots + k_s \geq m_1 + \cdots + m_s = n$. לכן,

$$k_1 + \cdots + k_s = m_1 + \cdots + m_s$$

ומכאן שמתקיים $k_1 = m_1, \ldots, k_s = m_s$, בדרוש.

$\boxed{\Rightarrow}$ נניח שלכל $i = 1, \ldots, s$ (לפי הסימונים הקודמים), $m_i = k_i$, ונוכיח ש-A לכסינה. בדי לעשות זאת, נוכיח של-$\mathbb{F}^n$ קיים בסיס המורכב מו"ע של A.

מההנחה $m_i = k_i$, נקבל $m_1 + \cdots + m_s = k_1 + \cdots + k_s = n$. לכל λ_i עבור $i = 1, \ldots, s$, נתבונן במרחב העצמי V_{λ_i}. מתקיים $m_i = \dim V_{\lambda_i}$.

לכל $i = 1, \ldots, s$ נבנה בסיס B_i של V_{λ_i}. אזי $|B_1| = m_1, \ldots, |B_s| = m_s$.

נגדיר $B=\bigcup_{j=1}^{s}B_j$, ונוכיח ש-B הוא הבסיס הנדרש. B מורכב מו"ע, על פי הבנייה.

נסמן $B_1=\left\{v_1^{(1)},\dots,v_1^{(m_1)}\right\},\dots,B_s=\left\{v_s^{(1)},\dots,v_s^{(m_s)}\right\}$. אזי

$$|B|=m_1+\cdots+m_s=n$$

לכן, מספיק להוכיח ש-B בת"ל. ניקח צירוף לינארי מתאפס של איברי הקבוצה B:

$$\underbrace{\alpha_1^{(1)}v_1^{(1)}+\cdots+\alpha_1^{(m_1)}v_1^{(m_1)}}_{w_1}+\cdots+\underbrace{\alpha_s^{(1)}v_s^{(1)}+\cdots+\alpha_s^{(m_s)}v_s^{(m_s)}}_{w_s}=0 \qquad (\star)$$

אזי $w_1+\cdots+w_s=0$, וכן לכל $i=1,\dots,s$ מתקיים $w_i\in V_{\lambda_i}$, כלומר כל w_i הוא ו"ע של A הקשור ל-λ או אפס.

אם $w_i=0$, אזי $\alpha_i^{(1)}v_i^{(1)}+\cdots+\alpha_i^{(m_i)}v_i^{(m_i)}=0$. לכן, אם כל $w_i=0$, אז כל המקדמים בשוויון $(\star)$ שווים לאפס, וסיימנו.

נניח בשלילה שיש כמה אינדקסים i שעבורם $w_i\neq 0$. אזי w_i-ים אלו הם ו"ע הקשורים ל-λ_i. נסמן ב-I את אוסף כל האינדקסים הנ"ל, ונקבל $\sum_{i\in I}w_i=0$, בסתירה לבת"ל של ו"ע הקשורים לע"ע שונים. הסתירה מוכיחה את הדרוש.

$\square$