1 דמיון מטריצות

הגדרה 1. אומרים שמטריצה A **דומה** למטריצה B אם קיימת מטריצה הפיכה P שעבורה מתקיים $B=P^{-1}AP$. מסמנים זאת $A\sim B$.

הערה 1. דמיון הוא יחס שקילות, כלומר הוא:

1. רפלקסיבי - $A\sim A$.

   הוכחה. ניקח $P=I$ ונקבל את הדרוש.

   □

2. סימטרי - אם $A\sim B$ אזי $B\sim A$.

   הוכחה. אם $B=P^{-1}AP$ אזי $A=PBP^{-1}$.

   □

3. טרנזיטיבי - אם $A\sim B$ וגם $B\sim C$ אזי $A\sim C$.

   הוכחה. אם $B=P^{-1}AP$ וגם $C=Q^{-1}BQ$ אזי $C=Q^{-1}P^{-1}APQ=(PQ)^{-1}A(PQ)$.

   □

הערה 2. אם V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$, $T:V\to V$ אופרטור לינארי, B_1,B_2 שני בסיסים של V, A_1,A_2 המטריצות המייצגות של T יחסית ל-B_1,B_2 בהתאמה ואם P מטריצת המעבר מ-B_1 ל-B_2, אזי $A_2=P^{-1}A_1P$.

ההערה הזו בעצם נותנת לנו אינטואיציה מה המשמעות של דמיון מטריצות: שתי מטריצות הן דומות אם ורק אם הן מייצגות את אותה העתקה בבסיסים שונים. אם כן, במהלך הקורס כשנדבר על דמיון נתייחס למטריצות, ואם נרצה לדבר בשפת העתקות נדבר על מציאת בסיס מתאים.

הערה 3. אם $A\neq I$, אזי A אינה דומה ל-I.

הוכחה. נניח בשלילה ש-$A\sim I$. זאת אומרת שקיימת P כך ש-$I=P^{-1}AP$. נכפול ב-P משמאל, ונקבל $P=AP$. נכפול ב-P^{-1} מימין, ונקבל $I=A$, בסתירה.

□

המשמעות של ההערה הקודמת - המטריצה המייצגת היחידה של העתקת הזהות היא מטריצת היחידה. אכן, ניתן לוודא זאת בקלות גם באמצעות כלים של לינארית 1. בעת נכליל את הטענה:

הערה 4. אם A איננה מטריצה סקלרית (זאת אומרת, $A\neq\alpha I$), אזי A אינה דומה לאף מטריצה סקלרית.

ההוכחה דומה לזו של ההערה הקודמת. נעיר שגם פה, כל מטריצה סקלרית היא מטריצה מייצגת של העתקת מתיחה / כיווץ, כלומר העתקת הזהות כפול סקלר כלשהו. גם במקרה זה ניתן לחשב ישירות את המטריצה המייצגת, ולגלות שהיא תמיד אותה סקלרית.

משפט 1. *אם A_1, A_2 מטריצות דומות אזי* $\mathsf{spec}\left(A_1\right)=\mathsf{spec}\left(A_2\right)$.

הוכחה. יהי λ ע"ע של A_1 בה"ב, לכן לפי משפט $\det\left(\lambda I-A_1\right)=0$. $A_1 \sim A_2$, לכן קיימת מטריצה P הפיכה שעבורה $A_2=P^{-1}A_1P$. נשים לב כי

$$\det\left(\lambda I-A_2\right)=\det\left(\lambda P^{-1}P-P^{-1}A_1P\right)=$$

$$=\det\left(P^{-1}\left(\lambda I-A_1\right)P\right)=\det\left(P^{-1}\right)\det\left(\lambda I-A_1\right)\det\left(P\right)=0$$

ולכן לפי משפט λ ע"ע של A_2.

מכאן נגיע למסקנה כי $\mathsf{spec}\left(A_1\right)=\mathsf{spec}\left(A_2\right)$.

□

במילים אחרות, אם שתי מטריצות הן דומות, יש להן אותם ערכים עצמיים (אך לא אותם וקטורים עצמיים בהכרח!). אם כן, נוכל להגיע למסקנה הבאה:

מסקנה 2. $\mathsf{spec}\left(T\right)=\mathsf{spec}\left(A\right)$ *למטריצה מייצגת A כלשהי.*

הערה 5. אם $A_1 \sim A_2$, אזי $\det\left(A_1\right)=\det\left(A_2\right)$.