1 ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של אופרטורים

הגדרה 1. **אופרטור לינארי** $T : V \to V$ הוא העתקה לינארית מ-V לעצמו.

הגדרה 2. יהי $T : V \to V$ אופרטור לינארי. אומרים ש-$\lambda \in \mathbb{F}$ הוא **ערך עצמי** (ע"ע) של האופרטור T אם קיים $0 \neq v \in V$ שעבורו $Tv = T(v) = \lambda v$. הוקטור v נקרא **וקטור עצמי** (ו"ע) של T הקשור ל-λ.

המשמעות זהה למטריצות - אילו וקטורים האופרטור מותח או מכווץ.

משפט 1. *יהי $T : V \to V$ אופרטור לינארי, יהי $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ בסיס של V ותהי A המטריצה המייצגת של T יחסית ל-B . אזי אם $\lambda \in \mathbb{F}$ הוא ערך עצמי של T, הוא גם ערך עצמי של A .*

הוכחה. נסמן

$$[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

A היא המטריצה המייצגת של T יחסית ל-B, ולכן $Tv = A \cdot [v]_B$. λ ע"ע של T, אזי קיים $v \neq 0$ כך ש-$Tv = \lambda v$, זאת אומרת $A \cdot [v]_B = \lambda [v]_B$, ולכן λ ע"ע של A.
$\square$

הגדרה 3. נגדיר לכל ע"ע של אופרטור לינארי T, מרחב $V_\lambda(T) = \{v \in V \mid Tv = \lambda v\}$. $V_\lambda(T)$ נקרא **המרחב העצמי** של T הקשור ל-λ.

כמו במטריצות, זהו אוסף הווקטורים העצמיים עם אפס, וגם זה מרחב וקטורי (הוכחה דומה).

הערה 1 (אלגוריתם למציאת ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים לאופרטור). נניח שנתון אופרטור לינארי $T : V \to V$, ורוצים למצוא לו ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים.

1. בוחרים בסיס B של V, ומוצאים את המטריצה המייצגת של T יחסית ל-B, נסמנה A.
2. מוצאים את הערכים העצמיים ואת הווקטורים העצמיים של A.
3. הערכים העצמיים של A הם בדיוק הערכים העצמיים של T, והווקטורים העצמיים של A הם וקטורי הקואורדינטות של הווקטורים העצמיים של T יחסית ל-B.