משפט 1. *תהי* $f \in D^{n+1}(a,b)$ *אזי*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

כאשר $c \in [x_0,x] \cup [x,x_0]$ *(לא ידוע מי קטן יותר ממי), או במילים אחרות :* $\exists 0 \le t \le 1$ $c = x_0 + t(x-x_0)$ *. במילים אחרות*

$$R_n(x,x_0) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

כאשר c *תלוי ב-* x *.*

הוכחה. יהיו x, x_0 אזי מההגדרה $R_n(x,x_0) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$
בעת נגדיר $\varphi(t) = R_n(x,t)$ ונראה ש-

$$\varphi(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k$$

נגדיר גם בשביל הפשטות $\psi(t) = (x-t)^{n+1}$
נניח בה"כ ש- $x < x_0$, ועבור המצב ההפוך נעשה באופן אנלוגי:
ממשפט הערך הממוצע של קושי נקבל ש- $\exists c : \frac{\varphi(x_0)-\varphi(x)}{\psi(x_0)-\psi(x)} = \frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)}$
בעת נשים לב ש-

$$\varphi'(t) = \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k\right)' = 0 - \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k\right)'$$

(הנגזרת של $f(x)$ זה 0 משום שזהו מספר קבוע כי קבענו את x בהתחלה) . בעת אם נשתמש בכלל לייבניץ ונגזור בזהירות, נשים לב שזה פשוט $-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$
עכשיו אם נחזור למסקנה של משפט קושי,

$$\exists c : \frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)} = \frac{\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n}{(n+1)(x-c)^n} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} = \frac{\varphi(x_0)-\varphi(x)}{\psi(x_0)-\psi(x)} =$$

$$\frac{0 - R_n(x,x_0)}{(x-x_0)^{n+1}} \Rightarrow R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

□