עד כה הגדרנו רציפות באופן נקודתי ואמרנו שפונקציה רציפה בקטע אם היא רציפה בכל נקודה בקטע בנפרד.

באופן אינטואיטיבי, אומרים כי פונקציה מתכנסת 'יותר מהר' אל הגבול שלה, אם הדלתא הנדרש לאפסילון הוא גדול יותר (כלומר הפונקציה קרובה לגבול בתחום יותר רחב). אנו רוצים להגדיר פונקציות אשר מהירות ההתכנסות שלהן דומה בכל נקודה בקטע מסויים.

הגדרה 1. פונקציה f נקראת רציפה במידה שווה (רציפה במ"ש) בקטע A אם: *לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל זוג נקודות $x_1, x_2 \in A$ המקיימות $|x_1 - x_2| < \delta$ מתקיים $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$

שימו לב כי ברציפות רגילה בקטע A, לכל נקודה בקטע ההתאמה של הדלתא לאפסילון עשוייה להיות שונה. כאשר הפונקציה רציפה במ"ש, לכל אפסילון יש דלתא המתאים לכל הקטע A.

הערה: ברור שאם פונקציה רציפה במ"ש על קטע A, היא גם רציפה במ"ש על כל קטע המוכל ב-A.

דוגמה 1. נבחן את הפונקציה $f(x) = x$, ונוכיח כי היא רציפה במ"ש על כל ציר הממשיים.
אכן, לכל אפסילון ניקח דלתא שווה לאפסילון ונקבל כי $|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1 - x_2| <$ $\delta = \epsilon$

בדוגמא הבאה נלמד כי פונקציה מסויימת עשוייה להיות רציפה במ"ש בקטע מסויים אך לא רציפה במ"ש בקטע אחר. כפי שנראה בהמשך, כל פונקציה הרציפה על קטע סופי וסגור רציפה בו במ"ש, ואילו ישנן פונקציות רציפות שאינן רציפות במ"ש על כל ציר הממשיים.

ראשית, נביט ב $f(x) = x^2$ על הקטע הסופי (a, b). יהי אפסילון גדול מאפס, אזי:
$|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1^2 - x_2^2| = |(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)| \le |x_1 - x_2| \cdot 2max(|a|, |b|)$
בעת, אם ניקח $\delta = \frac{\epsilon}{2max(|a|,|b|)}$ נקבל את הדרוש.

עכשיו, נבחן את אותה הפונקציה $f(x) = x^2$ על כל הממשיים, ונוכיח כי היא אינה רציפה שם במ"ש.

ניקח $\epsilon = 1$. צריך להוכיח כי לכל $\delta > 0$ קיים זוג מספרים ממשיים המקיימים $|x_1 - x_2| < \delta$ וגם $|f(x_1) - f(x_2)| \ge 1$.

ניקח $x_2 = x_1 + \frac{\delta}{2}$ ונראה כי אם נבחר את x_1 להיות גדול מספיק, נקבל את הדרוש.
ברור כי $|x_1 - x_2| = \frac{\delta}{2} < \delta$

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1^2 - x_2^2| = |(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)| = \frac{\delta}{2}|2x_1 + \frac{\delta}{2}|$$

ברור שאם נגדיל את x_1 מספיק נקבל את הדרוש.

דוגמה 2.

משפט 1. *אם f רציפה במ"ש ב- A אזי רציפה שם.*

הוכחה. יהי $x_0 \in A$, נרצה להראות ש- f רציפה בו. כלומר $\forall\varepsilon > 0\exists\delta\forall x : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. אבל ידוע מהנתון שלכל אפסילון קיים דלתא כך שהתנאי נכון לכל x_1, x_2 שמרחקם זה מזה קטן מ- δ , בפרט ל- x, x_0 . □

משפט 2. *אם f, g רבמ"ש ב-A אזי לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ מתקיים ש- $\alpha f + \beta g$ רבמ"ש ב-A.*
שימו לב, כפל אינו רציף במ"ש בהכרח, לדוגמא $x^2 = x \cdot x$, כאשר הפונקציה משמאל אינה רציפה במ"ש על כל הממשיים, ואילו הפונקציות מימין כן.

הוכחה. יהי $\varepsilon > 0$. אזי ידוע שקיימים δ_1, δ_2 כך ש-

$$\forall x_1, x_2 : |x_1 - x_2| < \delta_1 \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2|\alpha|}$$

$$\forall x_1, x_2 : |x_1 - x_2| < \delta_2 \Rightarrow |g(x_1) - g(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2|\beta|}$$

נגדיר $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. יהיו x_1, x_2 כך ש- $|x_1 - x_2| < \delta$. נראה כי

$$|\alpha f(x_1)+\beta g(x_1)-(\alpha f(x_2)+\beta g(x_2))| \leq |\alpha|\cdot|f(x_1)-f(x_2)|+|\beta|\cdot|g(x_1)-g(x_2)| < |\alpha|\frac{\varepsilon}{2|\alpha|}+\beta\frac{\varepsilon}{2|\beta|} = \varepsilon$$

□

משפט 3. *פונקציה f אינה רציפה במ"ש בקטע A אמ"ם קיים זוג סדרות (עם איברים מ-A) המקיימות:*

$$|x_n - y_n| \to 0$$

וגם

$$|f(x_n) - f(y_n)| \not\to 0$$

הוכחה. אם הפונקציה אינה רציפה במ"ש אזי קיים אפסילון גדול מאפס כך שלכל דלתא גדול מאפס יש זוג מספרים בקטע במרחק קטן מדלתא, כך שהפרש התמונות בינהם גדול או שווה לאפסילון.

ניקח סדרת דלתאות כלשהי השואפת לאפס. הסדרות המורכבות מהזוגות המותאמים לדלתאות מקיימות את הדרוש.

בכיוון ההפוך, אם יש זוג סדרות כזה, כיוון שסדרת ההפרשים בין התמונות אינה שואפת לאפס יש לה תת סדרה שמתכנסת למספר שונה מאפס (הגבול העליון). תת הסדרות המתאימות של הזוגות יספקו זוג מתאים לכל דלתא, כאשר האפסילון יהיה חצי מגבול סדרת ההפרשים.
□

משפט 4. *אם f רבמ"ש על קטע סופי אזי היא חסומה שם. המשפט ההפוך לא נכון, לדוגמה $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ ב- $(0,1)$*

הוכחה. נניח הקטע הסופי הוא מהצורה (a,b) (עבור קטעים סופיים אחרים יותר קל). ידוע ש- f רבמ"ש על הקטע אזי

$$\exists\delta\forall x_1, x_2 : |x_1 - x_2| \leq \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < 1$$

נקבע $x_0 \in (a,b)$ ונסתכל על הסדרה $b_n = x_0 + \delta n \to \infty$ ומכאן שלכל $x > x_0$ קיים N_x כך ש- $x < b_{N_x}$ ואז מתקיים ש-

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f(b_{N_x-1}) + f(b_{N_x-1}) - \cdots - f(x_0)| =\leq$$

$$|f(x)-f(b_{N_x-1})|+|f(b_{N_x-1})-f(b_{N_x-2})|+\cdots+|f(b_1)-f(x_0)| < 1+1+\cdots 1 \leq N_x$$

אבל $N_x \not\to \infty$ כש- $x \to b$, ומכאן שבכל אופן יש איזה N_b מקסימלי ומתקיים ש- $\forall x > x_0 : |f(x) - f(x_0)| < N_b$. באופן דומה $\forall x < x_0 : |f(x) - f(x_0)| < N_a$
לכן הפונקציה חסומה מלעיל ע"י $f(x_0) + N_a + N_b$ ומלרע ע"י $f(x_0) - N_a - N_b$ □

משפט 5. *משפט קנטור: פונקציה רציפה בקטע סגור וסופי, רציפה שם במ"ש*

הוכחה. תהי f רציפה על קטע סגור וסופי $[a,b]$. נניח בשלילה שהיא לא רציפה שם במ"ש. לכן קיים אפסילון גדול מאפס, כך שלכל דלתא גדול מאפס, יש שתי נקודות במרחק קטן מדלתא כך שהפרש התמונות שלהן גדול או שווה לאפסילון. ניתן אם כך לבנות סדרה של זוגות של נקודות

x_n, y_n כך שמתקיים $x_n - y_n \to 0$ אבל $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$

לפי משפט בולצאנו-ויירשטראס לסדרות, יש לx_n תת סדרה מתכנסת x_{n_k} (כיוון שהקטע סופי, הסדרה חסומה).

בנוסף, לתת הסדרה y_{n_k} יש תת סדרה מתכנסת. אם כך, בנינו זוג סדרות מתכנסות המקיימות את התנאים:

$x'_n - y'_n \to 0$

$|f(x'_n) - f(y'_n)| \geq \epsilon$

אבל כיוון שזה קטע סגור, נקודת הגבול של הסדרות המתכנסות שייכת לקטע (נקודת הגבול בינהן זהה כי המרחק בינהן שואף לאפס). לכן, לפי רציפות,

$\lim f(x'_n) = \lim f(y'_n)$

בסתירה.

□

משפט 6. *נניח* $f : A \to B$ *רבמ"ש ו-* $g : B \to \mathbb{R}$ *רבמ"ש אזי* $h = g \circ f$ *רבמ"ש*

הוכחה. תהיינה x_n, y_n סדרות של נק' כך ש- $|x_n - y_n| \to 0$.

f רבמ"ש ולכן $|f(x_n) - f(y_n)| \to 0$ אבל גם g רבמ"ש ולכן $|g(f(x_1)) - g(f(x_2))| = |h(x_1) - h(x_2)| \to 0$. מהשלילה של אחת הטענות הקודמות נקבל ש- h רבמ"ש. □