הגדרה 1. פונקציה $f : A \to B$ נקראת "חד-חד ערכית" (או בקיצור חח"ע) אם לכל $x \neq y$ ב-A מתקיים ש- $f(x) \neq f(y)$. הפונקציה נקראת "על" אם $\forall_{y\in B}\exists_{x\in A} : f(x) =$ y . במקרה שפונקציה היא חח"ע ועל אומרים שהיא "הפיכה", משום שאפשר להגדיר $f^{-1} : B \to A$ כך ש- $f^{-1} \circ f = Id_A, f \circ f^{-1} = Id_B$, או במילים אחרות : $\forall x \in A :$ $f^{-1}(f(x)) = x, \forall y \in B : f(f^{-1}(y)) = y$

הגדרה 2. פונקציה $f : A \to \mathbb{R}$ נקראת מונוטונית עולה ממש אם $\forall x < y : f(x) < f(y)$ ובאופן אנלוגי מונוטוני יורדת ממש.

סימון: כאשר נסמן $< a, b >$ הכוונה היא לאחת מהאפשרויות $[a, b), (a, b], [a, b], (a, b)$ (כל אחת תתאים).

נניח ש- $f :< a, b >\to \mathbb{R}$ רציפה אזי f חח"ע אם ורק אם f מונוטונית עולה ממש או מונוטונית יורדת ממש.

הוכחה. $\boxed{\Rightarrow}$ טריוויאלי מההגדרה

$\boxed{\Leftarrow}$ נניח f לא מונוטונית ממש, ולכן $\exists x_1 < x_2 : f(x_1) \leq f(x_2), \exists x_3 < x_4 f(x_3) \geq$ $f(x_4)$ (כך לא מונוטונית יורדת ולא מונוטונית עולה) . לכן : $\exists \alpha, \beta, \gamma \in \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ $\alpha < \beta < \gamma \wedge f(\beta) \geq f(\alpha), f(\gamma)$ ואם נניח בה"כ ש- $f(\alpha) < f(\gamma)$ אזי נזכור ש- f רציפה ועבור $t \in (f(\gamma), f(\beta))$ לפי משפט ערך הביניים $\exists c_1 \in [\alpha, \beta] : f(c_1) = t, \exists c_2 \in$ $[\beta, \gamma] : f(c_2) = t$ ומכאן ש- f אינה חח"ע. □

הבחנה:

תהי $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ רציפה בקטע ומונוטונית ממש בו. ממשפט וויירשטראס ניתן להגדיר $d = \sup f, c = \inf f$ סופיים ואז אפשר לצמצם את טווח הפונקציה מכל $\mathbb{R}$ אל $[c, d]$. בעת מהמשפט השני של וויירשטראס f מקבלת את הערכים האלו ולכן $c, d \in \operatorname{Im} f$ וממשפט ערך הביניים נסיק כי $f : [a, b] \to [c, d]$ פונקציה על וכיוון שהיא גם מונוטונית ממש אז היא חח"ע ואז הפיכה. בעת אפשר לדבר על f^{-1} במקרה הזה.

באותם התנאים של ההבחנה הקודמת, הפונקציה $f^{-1} : [c, d] \to [a, b]$ רציפה ומונוטונית ממש .

הוכחה. נניח שלא רציפה □