מי שזוכר מהתיכון, תמיד בחקירת פונקציות היה צריך למצוא "נק' פיתול" ו"תחומי קעירות וקמירות". בשלב זה אתם אמורים לשים לב שמתמטיקאים לא מגדירים דברים כמו "קמור זה בשזה נראה מחייך" כמו שעשינו בתיכון. בחלק הזה נפרמל את הדברים ונראה גם שימוש של זה.

הגדרה 1. פונקציה $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ נקראת "קמורה" אם

$$\forall x_1,x_2 \forall 0<\lambda<1: f(x_1+\lambda(x_2-x_1))\le f(x_1)+\lambda(f(x_2)-f(x_1))$$

כלומר **לכל** 2 נק' על גרף הפונקציה הקטע שמחבר ביניהם נמצא מעל גרף הפונקציה.
פונקציה נקראת קמורה ממש אם

$$\forall x_1\neq x_2 \forall 0<\lambda<1: f(x_1+\lambda(x_2-x_1))< f(x_1)+\lambda(f(x_2)-f(x_1)$$

באופן אנלוגי מגדירים קעורה וקעורה ממש.

משפט 1. *תהי $f\in D(a,b)$ אזי*

1. *f קמורה אם ורק אם f' מונו עולה*
2. *f קעורה אם ורק אם f' מונו יורדת*
3. *f קמורה ממש אם ורק אם f' מונו עולה ממש*
4. *f קעורה ממש אם ורק אם f' מונו יורדת ממש*

הוכחה. נוכיח רק את 1, כל שאר ההוכחות דומות מאוד.

$\boxed{\Leftarrow}$

יהיו $x_1,x_2\in(a,b)$ ובה"כ $x_1<x_2$. ידוע ש- f קמורה ולכן $\forall 0<\lambda<1:$ $f(x_1+\lambda(x_2-x_1))\le f(x_1)+\lambda(f(x_2)-f(x_1))$ $\square$