הגדרה 1. נגדיר את $\exp(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ ונראה כי מוגדר היטב לכל $x\in\mathbb{R}$ משום שלפי מבחן השורש של קושי $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\frac{x^n}{n!}|}=|x|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0<1$ ומכאן שמתכנס.

$$\exp(x)\cdot\exp(y)=\exp(x+y)$$
$$\exp(-x)=\frac{1}{\exp(x)}$$

הוכחה. הטור מתכנס בהחלט ולכן אפשר להשתמש בכפל טורים:

$$\exp(x)\cdot\exp(y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\frac{y^m}{m!}=\sum_{N=0}^{\infty}\sum_{n+m=N}\frac{x^n}{n!}\frac{y^m}{m!}=\sum_{N=0}^{\infty}\frac{1}{N!}\sum_{n+m=N}\frac{N!x^ny^m}{n!m!}=\sum_{N=0}^{\infty}\frac{1}{N!}(x+y)^N=\exp(x+y)$$

$$1=\exp(0)=\exp(x-x)=\exp(x)\cdot\exp(-x)\Rightarrow\exp(-x)=\frac{1}{\exp(x)}$$

□

מכל האמור לעיל נסיק ש- $\exp(x)=a^x$ כאשר $a=\exp(1)$ אבל הוכחנו בעבר ש- $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=e$ ומכאן ש- $\exp(x)=e^x$. נסיק מכך ש- $e^x>1$ עבור $x>0$ ו- $e^x<1$ עבור $x<0$

$\exp(x)$ מונוטונית עולה ממש

הוכחה. $x<y\Rightarrow y-x>0\Rightarrow\exp(y-x)=\frac{\exp(y)}{\exp(x)}>1\Rightarrow\exp(y)>\exp(x)$

□

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

הוכחה. נשים לב ש- $e^x=1+x+o(x), x\to0$ ולכן לפי הגדרה $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1+x+o(x)_{x\to0}-1}{x}=1+\lim_{x\to0}\frac{o(x)_{x\to0}}{x}=1+0=1$ □

ממה שהוכחנו קודם ניתן להגדיר פונקציה הופכית ל- e^x:

הגדרה 2. $\ln:(0,\infty)\to(-\infty,\infty)$ מוגדר להיות הפונקציה ההופכית של $e^x:(-\infty,\infty)\to(0,\infty)$. מכאן ניתן להוכיח כל מיני תכונות של הלוגריתם:

$\ln xy=\ln x+\ln y$

$\ln$ מונוטונית עולה ממש

$\ln 1=0$

$\lim_{x\to\infty}\ln(x)=\infty, \lim_{x\to0^+}\ln(x)=-\infty$