

הגדרה 1. אומרים שסדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת קושי (Cauchy sequence) אם מתקיים התנאי:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n, m > N : |x_n - x_m| < \epsilon$$

כלומר המרחק בין איברי הסדרה קטן באופן כזה שמאיזהשהו מקום בסדרה והלאה, מרחק בין 2 איברים (שיכולים להיות במקומות רחוקים כרצוננו אחד מהשני בסדרה) יהיה קטן כרצוננו.

משפט 1. בכל תת קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}$, אם סדרה שמורכבת מאיברי הקבוצה מתכנסת אז היא סדרת קושי (בפרט זה נכון לכל סדרה ב- \mathbb{R}).

הוכחה. יהי אפסילון גדול מ-0, אזי $\exists N \forall n > N |x_n - L| < \frac{\epsilon}{2}$. לכן מתקיים:
 $\forall n, m > N : |x_n - x_m| = |(x_n - L) + (L - x_m)| \leq |x_n - L| + |L - x_m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$
 \square

הגדרה 2. $A \subseteq \mathbb{R}$ נקרא "שלם" אם כל סדרת קושי המורכבת מאיבריו מתכנסת לאיבר בתוכו.

דוגמה 1. \mathbb{Q} לא שלם, כיוון שאם ניקח את

$$3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, 3.14159, \dots \rightarrow \pi \notin \mathbb{Q}$$

זוהי סדרה שמתכנסת ב- \mathbb{R} ולכן, מהמשפט הקודם, היא סדרת קושי. אבל היא סדרת קושי שמורכבת מאיברים רציונאליים ולא מתכנסת למספר רציונאלי, ולכן קבוצת המספרים הרציונאליים לא מהווה מרחב שלם.

מסקנה 2. בכל מרחב שלם, סדרה מתכנסת אם ורק אם היא סדרת קושי.

הוכחה. מימין לשמאל זה נכון באופן כללי מהמשפט הקודם (סדרה מתכנסת היא תמיד סדרת קושי) ומשמאל לימין נובע מההגדרה של מרחב שלם, שדורש שכל סדרת קושי תתכנס למשהו בתוכו, ובפרט תתכנס.
 \square

משפט 3. \mathbb{R} שלם

הוכחה. נניח $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי, אזי לכל אפסילון חיובי

$$\exists N \forall n, m > N |x_n - x_m| < \epsilon$$

ואז $x_m - \epsilon < x_n < x_m + \epsilon$ וזה נכון לכל $n > N$

$$x_m - \epsilon \leq l_{N+1} \leq L_{N+1} \leq x_m + \epsilon$$

מהעברת אגפים מקבלים ש- $0 \leq L_{N+1} - l_{N+1} \leq 2\epsilon$. אם ניקח לכן סדרת אפסילונים ששואפת ל-0 ובהתאם אליהם ניקח את ה- N ים המתאימים וממשפט הסנדוויץ' נקבל שהגבול העליון והתחתון שווים, ואז לפי משפט הסדרה מתכנסת אליהם.
 \square

דוגמה 2. נסתכל על

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

נראה כי המרחק בין איברים עוקבים בסדרה הולך ושואף ל-0: $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$.
 , אף על פי כן, הסדרה לא תתכנס. כל סדרה מתכנסת היא סדרת קושי, ולכן אם נראה
 שהסדרה הזאת לא סדרת קושי, אז בהכרח היא לא מתכנסת. אכן, נראה כי

$$x_{2n} - x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

כלומר אין מקום בו משם והלאה המרחק בין כל 2 איברים קטן מחצי, ולכן זו לא סדרת קושי.

מסקנה 4. הטור ההרמוני, שמוגדר להיות $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ שווה לאינסוף.

הסבר: הסדרה הזאת היא מונוטונית עולה ולכן מתכנסת ל- $\sup x_n$ אבל אם זה היה מספר ממשי היינו מקבלים סדרה מונוטונית עולה וחסומה מלעיל ולכן מתכנסת, בסתירה למה שהרגע הוכחנו. לכן בהכרח $\sup x_n = \infty$ ולשם הסדרה שואפת.