נניח $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה בקטע (כלומר רציפה בכל נק' בקטע) אזי לכל $y\in[f(a),f(b)]\cup[f(b),f(a)]$ קיים $c\in[a,b]$ כך ש- $f(c)=y$. (הערה: אנו לא יודעים אם $f(a)<f(b)$ או $f(b)<f(a)$ אבל בכל מקרה אם אחד מהם מתקיים אז אחת מהקבוצות שבאיחוד המתואר היא ריקה)

הוכחה. נניח בה"כ ש- $f(a)<f(b)$. יהי $y\in[f(a),f(b)]$, ונגדיר את $g(x)=f(x)-y$. נשים לב ש- $f(c)=y$ אם ורק אם $g(c)=0$ ולכן נוכיח שקיים c שמאפס את g. כעת נגדיר $E=\{x\in[a,b]|g(x)\leq 0$ ונשים לב ש- $a\in E$. נגדיר $c=\sup E$ ומכאן ש- $\forall n\in\mathbb{N}\exists x_n\in E: c-\frac{1}{n}<x_n\leq c$. בעצם $c_n\to c$ ומהרציפות של g בסכום של רציפות נובע ש- $g(c_n)=g(c)$ וכיוון ש- $g(c_n)\leq 0$ גם $g(c)\leq 0$. כעת נניח בשלילה ש- $g(c)<0$ ואז מהרציפות $0>\frac{g(c)}{2}>g(x)\Leftarrow-\frac{g(c)}{2}>|g(x)-g(c)|:\delta>x-c>0\forall0<\delta\exists$ אבל זה סותר את זה ש- $c=\sup E$ משום שיש טווח של xים שגדולים ממנו ועדיין $g(x)<0$. מכאן שבהכרח $g(c)=0$ ומצאנו את הדרוש □