משפט 1 (משפט הסנדוויץ'). *תהיינה הסדרות* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *כך ש-* $\forall n: a_n \leq x_n \leq b_n$ *ובנוסף* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = L$ *אזי הסדרה* x_n *מתכנסת והגבול שלה הוא* L.

הערה 1. שם המשפט נובע מכך שהסדרה האמצעית היא באמצע של מעין סנדוויץ' שיוצרות הסדרות a_n, b_n ששואפות לאותו גבול. פרופסור מארק אגרנובסקי מספר שברוסיה נהוג לקרוא למשפט הזה המשפט על שיכור ו-2 שוטרים משום שהסדרות a_n, b_n הן כמו שוטרים שהולכים למקום מסוים L וגורמים שיכור שהולך ביניהם x_n ללכת איתם לאותו מקום

הוכחה. אם $L = \infty$ אז פשוט עבור $M > 0$ ידוע שיש n_0 שמתקיים עבורו $\forall_{n>n_0} a_n > M$ ואז גם $x_n \geq a_n > M$. באותו אופן אם $L = -\infty$ אז נעשה אותו דבר רק עם העובדה ש- $x_n \leq b_n \leq M$.

אם $L \in \mathbb{R}$, יהי $\varepsilon > 0$. ידוע אז ש-

$$\exists_{n_1}\forall_{n>n_1} : L - \epsilon < a_n, \exists_{n_2}\forall_{n>n_2} : b_n < L + \epsilon$$

ואז עבור $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ מתקיים ש- $\forall_{n>n_0} : L - \epsilon < a_n \leq x_n \leq b_n < L + \epsilon$ ומכאן, ש- $|x_n - L| < \epsilon$ ואז לפי ההגדרה, $x_n \to L$. $\square$

דוגמה 1. נסתכל על הסדרה $a_n = n \cdot \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$. אי אפשר להשתמש באריתמטיקה של גבולות במקרה הזה, אך נראה כי מתקיים:

$$0 \leq n \cdot \sin\frac{1}{n^2} \leq n \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$$

שימו לב שאי השיוויון השני נובע מכך ש- $\sin x < x$ לכל x חיובי.

קיבלנו שהסדרה לכודה בין 0 (שבמובן שואף ל-0) לבין $\frac{1}{n}$ (סדרה שגם היא שואפת ל-0) ולכן בסך הכל, ממשפט הסנדוויץ', הסדרה מתכנסת ל-0.