

נניח שאנו מחפשים את הגבול של  $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)}$ . אם אחת הפונקציות שואפת ל-0 או אחת הפונקציות שואפת לאינסוף ויודעים די בקלות למה הגבול הזה שווה, ואם 2 הפונקציות שואפות למספר שהוא לא 0 גם קל מאריתמטיקה פשוטה של גבולות למצוא את הגבול של המנה. אבל מה קורה במצב של  $\frac{0}{0}$  או  $\frac{\infty}{\infty}$ ? אנחנו בבעיה, ופה נכנס כלל לופיטל (L'Hospital) שבכלל התגלה ע"י ברנולי.

**משפט 1.** נניח  $f, g$  גזירות בסביבה מנוקבת של  $p$  והנגזרת של  $g$  לא מתאפסת בסביבה מנוקבת זו. נניח גם ש-  $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$  קיים במובן הרחב (יכול להיות  $\infty$  או  $-\infty$ ).  
אם אחד מהבאים מתקיים:

$$1. \lim_{x \rightarrow p} f(x) = \lim_{x \rightarrow p} g(x) = 0$$

$$2. \lim_{x \rightarrow p} g(x) = \infty$$

אזי גם קיים הגבול של המנה והוא שווה ל-  $L$

צריך לשים לב שהדרישה שהגבול של מנת הנגזרות קיים הוא הכרחי. לדוגמה, אם ניקח את  $f(x) = x + \sin x - 1$  ו-  $g(x) = x$  אז בקלות נראה ש-  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$  אבל

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \cos x}{1}$$

□

הוכחה.