הגדרה 1. תהי קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}$, אזי:

1. M נקרא חסם מלעיל של A אם $\forall a \in A : a \leq M$ (כלומר שגדול/שווה מכל איברי הקבוצה)
2. m נקרא חסם מלרע של A אם $\forall a \in A : a \geq m$
3. חסם מלעיל של A נקרא מקסימום אם הוא שייך לקבוצה A (בעצם המקסימום זה איבר בקבוצה שגדול או שווה לכל איברי הקבוצה)
4. חסם מלרע של A נקרא מינימום אם הוא שייך לקבוצה A
5. חסם מלעיל של A נקרא החסם העליון של A אם אין ל-A חסם מלעיל קטן ממש ממנו, מסמנים אותו $\sup A$ (מהמילה superior)
6. חסם מלרע של A נקרא החסם התחתון של A אם אין ל-A חסם מלרע גדול ממש ממנו, מסמנים אותו $\inf A$ (מהמילה inferior)

דוגמה 1. ניקח לדוגמה את

$$A = \{1, 2, 3, -5, 463\}$$

1000 חסם מלעיל של A משום שגדול או שווה לכל איברי הקבוצה.
גם 683 חסם מלעיל של A, מאותה סיבה.
463 הוא חסם מלעיל מיוחד, הוא המקסימום, הוא חסם מלעיל שנמצא בתוך A עצמה, ובעצם גם החסם העליון משום שאם היה חסם מלעיל קטן ממנו, אז הוא היה קטן מ- $463 \in A$, כלומר קטן ממש מאיבר בקבוצה (בעצם כל מקסימום הוא חסם עליון).
מצד שני
-5.5 חסם מלרע של A משום שקטן או שווה לכל איברי הקבוצה.
-5 גם הוא חסם מלרע של A, אך הפעם זהו מינימום משום שזהו חסם מלרע בתוך הקבוצה A. באופן דומה למקסימום, בתור מינימום, הוא גם חסם תחתון.

דוגמה 2. ניקח את

$$B = \left\{ \left(\frac{1}{10}\right)^n : n \in \mathbb{N} \right\} = \{0.1, 0.01, 0.001, \cdots\}$$

נשים לב ש-0.1 חסם מלעיל של הקבוצה, ומשום גם נמצא בתוך הקבוצה הוא מקסימום שלה ומכאן גם חסם עליון.
מה המינימום שלה? נראה שאין כזה ע"י כך שנמצא את החסם התחתון של B ונראה שהוא לא בקבוצה, למרות שמינימום הוא תמיד גם בקבוצה וגם חסם תחתון.
0 חסם תחתון של B משום שחסם מלרע וגם אם קיים חסם מלרע גדול יותר, ε אז מתקיים

$$\forall n : \varepsilon \leq \left(\frac{1}{10}\right)^n = \frac{1}{10^n} \Rightarrow$$

$$\forall n : 10^n \leq \frac{1}{\varepsilon}$$

אבל החלק הימני קבוע והחלק השמאלי יכול להיות גדול כרצוננו (עבור בחירת n מספיק גדול) ולכן קיבלנו שמשהו שגדול כרצוננו קטן ממשהו קבוע וזוהי כמובן סתירה, ומכאן ש-0 הוא חסם המלרע הכי גדול.
מצד שני $0 \notin B$, ולכן אין מינימום.

שימו לב לשלילות הבאות:
M אינו חסם מלעיל אם"ם קיים איבר $a > M$
m אינו חסם מלרע אם"ם קיים איבר $a < M$
M אינו חסם עליון אם"ם הוא אינו חסם מלעיל או שקיים חסם מלעיל הקטן ממש ממנו.
m אינו חסם תחתון אם"ם הוא אינו חסם מלרע או שקיים חסם מלרע הגדול ממש ממנו.

הערה 1. תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ ונגדיר $B = \{-a : a \in A\}$. אזי M חסם מלעיל של A אם ורק אם $-M$ חסם מלרע של B ובנוסף M חסם עליון של A אם ורק אם $-M$ חסם תחתון של B.

הוכחה.
1. $-M$ חסם מלרע של B $\Leftrightarrow$
$\forall b \in B : -M \leq b$ אם ורק אם $\forall a \in A : -M \leq -a$ אם ורק אם $\forall a \in A : a \leq M$ אם ורק אם M חסם מלעיל של A

2. נניח M חסם עליון של A, בפרט הוא חסם מלעיל ולכן $-M$ חסם מלרע של B. בעת נניח בשלילה שקיים חסם מלרע $m \geq -M$, ולכן $M \leq -m$ חסם מלעיל של A בסתירה לכך ש- M חסם המלעיל הכי קטן שלו, ולכן אין חסם מלרע גדול מ- $-M$ ואז הוא חסם תחתון. את הכיוון השני מוכיחים באופן דומה.

□

הערה 2. מאחת ההגדרות של $\mathbb{R}$ מקבלים שלכל $\Phi \neq A \subseteq \mathbb{R}$ חסומה מלעיל קיים חסם עליון.

משפט 1. *אם $\Phi \neq A \subseteq \mathbb{R}$ חסומה מלרע אזי קיים חסם תחתון.*

הוכחה. תהי A לא ריקה חסומה מלרע. אם נגדיר את B כמו במשפט האחרון נקבל שהיא חסומה מלעיל לפי המשפט, ומההערה יש לה חסם עליון M. מאותו המשפט, נקבל ש- $-M$ חסם תחתון של A ולכן הוכחנו שיש לה חסם תחתון. (מצאנו אותו) □

משפט 2. *תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ חסומה מלעיל אזי:*
M חסם עליון של A אם"ם M חסם מלעיל של A וגם לכל $0 < \epsilon \in \mathbb{R}$ קיים $a \in A$ כך ש $a > M - \epsilon$
m חסם תחתון של A אם"ם m חסם מלרע של A וגם לכל $0 < \epsilon \in \mathbb{R}$ קיים $a \in A$ כך ש $a < m + \epsilon$

במילים: M חסם עליון אם הוא חסם מלעיל וגם אין חסם מלעיל הקטן ממנו. כלומר, כל מספר הקטן ממנו אינו חסם מלעיל. כלומר, אם נקטין את M בגודל כלשהו שאינו אפס נקבל מספר שאינו חסם מלעיל. מספר אינו חסם מלעיל אם"ם יש איבר בקבוצה הגדול ממנו. (ניסוח דומה עבור החסם התחתון.)

הוכחה. נניח M חסם עליון. מתוך ההגדרה של חסם עליון נובע בפרט ש-M חסם מלעיל. נותר להוכיח כי

$$\forall \epsilon > 0 \exists a \in A : a > M - \epsilon$$

נניח בשלילה כי קיים $\epsilon > 0$ כל שלכל האיברים $a \in A$ מתקיים $a \leq M - \epsilon$.
לכן, לפי ההגדרה, $M - \epsilon$ הוא חסם מלעיל של הקבוצה. מכיוון שאפסילון גדול מאפס, $M - \epsilon$ הוא חסם מלעיל קטן ממש מהחסם העליון M, בסתירה לכך שהוא חסם המלעיל הקטן ביותר.

□