

1.0 הגדרה

נגדיר את $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$.

משפט 1. קיים הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, לגבול הזה קוראים e .

הוכחה. נוכיח שהסדרה מונוטונית עולה וחסומה מלעיל.
עולה מונוטונית:

$$\begin{aligned} \frac{x_n}{x_{n-1}} &= \frac{(1 + \frac{1}{n})^n}{(1 + \frac{1}{n-1})^{n-1}} = \frac{(\frac{n+1}{n})^n}{(\frac{n}{n-1})^{n-1}} = \frac{(n+1)^n (n-1)^{n-1}}{n^n n^{n-1}} = \\ &= \frac{(n^2 - 1)^n n}{n^{2n} (n-1)} = (1 - \frac{1}{n^2})^n \frac{n}{n-1} \end{aligned}$$

לפי אי שיויון ברנולי, זה גדול או שווה לביטוי הבא:

$$(1 + n(-\frac{1}{n^2})) \cdot \frac{n}{n-1} = \frac{(n-1)n}{n(n-1)} = 1$$

מכאן שזוהי סדרה מונוטונית עולה.

חסומה מלעיל:

$$x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$$

ואם נפתח את הביטוי לפי הבינום של ניוטון נקבל

$$x_n = 1 + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{n^n}$$

איבר טיפוסי בסכום הזה הוא מהצורה

$$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \frac{1}{n^k} \leq \frac{n^n}{n^{n-k}k!} \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}$$

ולכן

$$x_n \leq 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

כל מה שאחרי ה-2 זה סדרה הנדסית אינסופית שסכומה 1 ולכן נקבל ש- $x_n \leq 3$
אז זוהי סדרה מונוטונית עולה וחסומה מלעיל ולכן מתכנסת.

□

2.0 תכונות של e

משפט 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}) = e$

הוכחה. נגדיר $e_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$. צריך להראות ש- $e_n \rightarrow e$. אם נשתמש באותה סדרה x_n שהגדרנו אז ראינו בהוכחה של המשפט הקודם ש- $x_n \leq e_n$. מצד שני

□

נשים לב שאם נגדיר $e_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ אז אם $N > n$ מתקיים

$$e_N - e_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots + \frac{1}{N!} \leq \frac{1}{(n+1)!} + \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n+2)^{N-n-1}} \right) =$$

$$\frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{\frac{1}{n+2} \left(\left(\frac{1}{n+2} \right)^{N-n-1} - 1 \right)}{\frac{1}{n+2} - 1} \leq \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} = \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{n+1}$$

כעת נשתמש בזה בשביל להוכיח:

משפט 3. $e \notin \mathbb{Q}$

הוכחה. נניח $e = \frac{p}{q} = 1 + \dots + \frac{1}{n!} + \alpha_n$ ומכאן $|\alpha_n| < \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{n+1}$ וע"י כפל של 2 האגפים נקבל

$$(n+1)! \frac{p}{q} = (n+1)! \left(1 + \dots + \frac{1}{n!} \right) + (n+1)! \alpha_n$$

וזה נכון לכל n , בפרט ל- $n > q$. במקרה זה, אגף שמאל שלם ואגף ימין מורכב ממשווא שהוא שלם ועוד $(n+1)! \alpha_n$ אבל החלק האחרון הזה הוא לא שלם משום שקטן מ- $\frac{1}{n+1}$. אגף שמאל, שהוא שלם הוא סכום של משהו שלם ומשהו שהוא לא שלם. סתירה \square