

1.0 דוגמה 1 - מטריצת היחידה

ניקח $A = I_n$, ונחפש את $spec(A)$. נבדוק בשתי שיטות:

1.1.0 שיטה ראשונה - חישוב ישיר

נניח ש- $I_n v = \lambda v$. מכאן, $v = \lambda v$, כלומר $\lambda = 1$, כלומר $spec(I_n) = \{1\}$.

2.1.0 שיטה שנייה - לפי המשפט

נשים לב כי $\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda - 1 \end{pmatrix}$ לכן, $\det(\lambda I - A) = (\lambda - 1)^n$ אם כן, $spec(I_n) = \{1\}$ ולכן $\lambda = 1 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^n = 0$ לסיכום, הערך העצמי של מטריצת היחידה הוא 1, ומהחישוב שבחלק הראשון גילינו שכל הווקטורים הם וקטורים עצמיים שלו. זה אכן מתאים לדברים המוכרים - כל וקטור הכופלים במטריצת היחידה נשאר עצמו, המתיחה היא תמיד פי 1.

2.0 דוגמה 2 - מטריצה אלכסונית כללית

$$A = D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} \text{נסמן}$$

נרצה לדעת מהו $spec(D)$. על פי המשפט, נסתכל על $\lambda I - D$:

$$\lambda I - D = \begin{pmatrix} \lambda - \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda - \alpha_n \end{pmatrix}$$

הדטרמיננטה: $\det(\lambda I - A) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \alpha_i) = 0$ קיבלנו ש- $spec(D) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$.

אכן, גם את התוצאה הזו יכולנו לצפות מראש! מטריצה אלכסונית מותחת בדיוק את וקטורי היחידה, e_1, \dots, e_n פי $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ בהתאמה.

3.0 דוגמה שלישית - מטריצה משולשית עליונה

$$A = T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} \text{ניקח}$$

על פי הוכחה דומה לזו של מטריצה אלכסונית - מקבלים $spec(T) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$.

4.0 דוגמה רביעית

ניקח מעל $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ את המטריצה $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ אזי $\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$ לפי חישוב, $\det(\lambda I - A) = \lambda^2 + 1 = 0$, אבל למשוואה זו אין פתרונות ב- \mathbb{R} .

אם כן, $\text{spec}(A) = \emptyset$.