יהיו $\{a_n\}_{n=1}^{\infty},\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרות.

משפט: אם $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \exists M : |b_n| < M$ אז $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$ (מכפלה של סדרה חסומה בסדרה ששואפת ל-0 זו סדרה ששואפת ל-0)

הוכחה: יהי $\epsilon > 0$. כיוון ש- a_n שואפת ל-0, לכל מרחק שיתנו לי קיים N כך שלכל $n > N$, מרחק איברי a_n מ-0 קטן מהמרחק ההתחלתי שנתנו לי, בפרט עבור המרחק $\frac{\epsilon}{M}$. מתקיים אז ש-

$$\exists N \forall n > N : |a_n| < \frac{\epsilon}{M} \Rightarrow \exists N \forall n > N : |a_n| \cdot M < \epsilon$$

אבל המרחק של $a_n b_n$ מ-0 הוא $|a_n b_n - 0| = |a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leq |a_n| \cdot M$ וראינו בשורה הקודמת שקיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים ש- $|a_n| \cdot M \leq \epsilon$ ולכן אם ניקח את אותו N, לכל $n > N$ יתקיים ש- $|a_n b_n| < \epsilon$, ומכאן, לפי הגדרת הגבול, $a_n b_n$ שואפת ל-0. משל

דוגמה:

$a_n = \frac{\sin(n!)}{n}$ היא סדרה שנראית די מסובבת במבט ראשון, אבל היא מתכנסת ל-0. זאת משום שהיא מכפלה של סדרה חסומה, $\sin(n!)$ (תמיד מתקיים ש- $|\sin(x)| \leq 1$) וסדרה ששואפת ל-0, $\frac{1}{n}$

תרגיל בית: נסו להשתמש בכך שעבור 2 מספרים a, b תמיד מתקיים $||a| - |b|| \leq |a - b|$ בדי להוכיח שאם $a_n \to L$ אז $|a_n| \to |L|$. הפריכו את המשפט ההפוך.

משפט: $a_n \to L \Leftrightarrow a_n - L \to 0$.

משפט: אם 2 הסדרות שואפות ל-0 אז גם הסכום והמכפלה שלהן שואפות ל-0.

הוכחה: בדי להוכיח שהמכפלה שואפת ל-0, פשוט נזכור שאחת הסדרות חסומה (כי מתכנסת) והשנייה שואפת ל-0 ולכן המכפלה שלהן שואפת ל-0. עבור סכום, צריך להוכיח ש- $\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n > N : |a_n b_n - 0| < \epsilon$. יהי $\epsilon > 0$, מהנתון ומהגדרת גבול אנו יודעים ש-

$$\exists N_1 \forall n > N_1 : |a_n - 0| < \frac{\epsilon}{2}$$
$$\exists N_2 \forall n > N_2 : |b_n - 0| < \frac{\epsilon}{2}$$

לכן אם נגדיר $N = max\{N_1, N_2\}$ יתקיים

$$\forall n > N : |a_n + b_n - 0| = |a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

מצאנו N כנדרש. משל