תרגיל. תהי $A = \{\frac{1}{n^2} + 2(-1)^n | n \in \mathbb{N}\}$ מצא חסם עליון, חסם עליון, מינימום ומקסימום (אם הם קיימים).

ראשית, נביט במספר איברים מהקבוצה על מנת לקבל הערכה כלשהי: $A = \{-1, 2\frac{1}{4}, -1\frac{8}{9}, 2\frac{1}{16}, ...\}$

אנחנו מעריכים כי שתים ורבע הוא מקסימום (ולכן גם חסם עליון, הרי מקסימום הינו תמיד חסם עליון אם הוא קיים), ואנו מעריכים כי מינוס שתים הינו חסם תחתון שאינו בקבוצה ולכן אין מינימום. נוכיח את כל זה.

נוכיח כי שתים ורבע חסם מלעיל (ואז מכיוון שהוא בקבוצה הוא מקסימום ולכן חסם עליון). צ"ל שכל איבר בקבוצה קטן או שווה לו, ולכן צ"ל שלכל n טבעי מתקיים

$$\frac{1}{n^2} + 2(-1)^n \leq 2 + \frac{1}{4}$$

עבור n=1 זה ברור. אם $n \geq 2$ ניתן לומר

$$\frac{1}{n^2} + 2(-1)^n \leq \frac{1}{n^2} + 2 \leq 2 + \frac{1}{4}$$

בעת נוכיח כי מינוס שתים הינו חסם מלרע, כלומר לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{n^2} + 2(-1)^n > -2$$

אבל

$$\frac{1}{n^2} + 2(-1)^n \geq \frac{1}{n^2} - 2 > -2$$

בעת נוכיח כי בנוסף, לכל אפסילון חיובי קיים איבר בקבוצה כך ש$a < -2 + \epsilon$.

יהי אפסילון גדול מאפס, צ"ל n טבעי כך ש:

$$\frac{1}{n^2} + 2(-1)^n < -2 + \epsilon$$

מכיוון שצריך להראות שקיים n טבעי אחד כזה, מספיק בפרט למצוא אחד כזה אי זוגי. לכן ננסה למצוא

$$\frac{1}{(2k+1)^2} + 2(-1)^{2k+1} < -2 + \epsilon$$

$$\frac{1}{(2k+1)^2} - 2 < -2 + \epsilon$$

$$2k + 1 > \sqrt{\frac{1}{\epsilon}}$$

תמיד ניתן למצוא k טבעי כזה אחרת קבוצת הטבעיים הייתה חסומה, משל.

לכן הוכחנו שמינוס שתים הינו חסם תחתון. נותר להוכיח כי לא קיים מינימום

נוכיח כי החסם התחתון מינוס שתים אינו שייך לקבוצה ולכן לא קיים מינימום (אחרת הוא היה חסם תחתון). כלומר, נוכיח כי לא קיים n טבעי כך ש:

$$\frac{1}{n^2} + 2(-1)^n = -2$$

אבל כבר הראנו שאיברי הקבוצה גדולים ממש ולא שווים למינוס שתים.