תרגיל מצא את הפתרונות של המשוואה $2\left(\frac{4^x+1}{2^x}\right)^2-7\left(\frac{4^{-x}+1}{2^{-x}}\right)+5=0$

פתרון. ראשית נשים לב לכך ש

$\frac{4^x+1}{2^x}=\frac{4^{-x}+1}{2^{-x}}=2^x+\frac{1}{2^x}$

ולכן נסמן $t=2^x+\frac{1}{2^x}$ ונקבל את המשוואה הריבועית

$2t^2-7t+5=0$ עם הפתרונות $t_{1,2}=1,\frac{5}{2}$

לכן עלינו לפתור את המשוואות $2^x+\frac{1}{2^x}=1$, $2^x+\frac{1}{2^x}=\frac{5}{2}$

ראשית, נביט במשוואה $2^x+\frac{1}{2^x}=1$. נכפול בשני האגפים ב2^x ונקבל $(2^x)^2-2^x+1=0$. נסמן $s=2^x$ ונקבל את המשוואה הריבועית $s^2-s+1=0$ שאין לה פתרונות.

שנית, נביט במשוואה $2^x+\frac{1}{2^x}=\frac{5}{2}$, נכפול בשני האגפים ב$2\cdot 2^x$ ונקבל $2(2^x)^2-5(2^x)+2=0$. נציב $s=2^x$ ונקבל את המשוואה הריבועית $2s^2-5s+2=0$ עם הפתרונות $s_{1,2}=2,\frac{1}{2}$.

לכן נותר לנו לפתור את שתי המשוואות $2^x=2$, $2^x=\frac{1}{2}$

ולכן הפתרונות הסופיים הם $x=\pm 1$

תרגיל מצא את הפתרונות של המשוואה $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=4$

פתרון נכפול את שני אגפי המשוואה בביטוי $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x$ ונקבל

$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^{2x}+\left(\sqrt{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}\right)^x=4\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x$:

שימו לב, לפי הנוסחא $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ לכפל מקוצר, מתקיים כי $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=4-3=1$ והרי $\sqrt{1}^x=1$. לכן קיבלנו

$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^{2x}-4\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x+1=0$:

נציב $t=\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x$ ונקבל את המשוואה הריבועית $t^2-4x+1=0$ עם הפתרונות $t_{1,2}=2\pm\sqrt{3}$.

לכן נותר לנו לפתור את שתי המשוואות $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=2\pm\sqrt{3}$

המשוואה $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=2+\sqrt{3}$ שקולה למשוואה $\left(2+\sqrt{3}\right)^{\frac{x}{2}}=2+\sqrt{3}$

ולכן $\frac{x}{2}=1$ ומכאן $x=2$.

את המשוואה $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=2-\sqrt{3}$ נכפול בשני האגפים ב$2+\sqrt{3}$ ונקבל

$(2+\sqrt{3})\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=1$:

ולכן

$(\sqrt{2+\sqrt{3}})^2\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=1$:

$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^{x+2}=1$:

ולכן $x+2=0$ כלומר $x=-2$.

סה"כ הפתרונות הסופיים הינם $x=\pm 2$