1 ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של מטריצות

הגדרה 1. תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$. אומרים ש-$\lambda \in \mathbb{F}$ הוא **ערך עצמי (ע"ע)** של A, אם קיים וקטור $0 \neq v \in \mathbb{F}^n$ שעבורו $Av = \lambda v$.

הוקטור v נקרא **וקטור עצמי (ו"ע)** של A הקשור ל-λ.

הגדרה 2. אוסף כל הערכים העצמיים של A נקרא **הספקטרום** של A, ומסומן $\text{spec}(A)$.

הערה 1. יכול להיות המצב $spec(A) = \emptyset$.

הרעיון בערכים עצמיים ווקטורים עצמיים הוא לדעת אילו וקטורים המטריצה מותחת או מכווצת. הווקטור העצמי - מי ההעתקה מותחת או מכווצת, והערך העצמי - פי כמה. בהמשך נראה שלערכים העצמיים ולווקטורים העצמיים יש תפקיד משמעותי ב"הבנת" מטריצות.

משפט 1. *$\lambda = 0$ ערך עצמי של A אם ורק אם A איננה הפיכה.*

הוכחה. $\boxed{\Leftarrow}$ נניח $\lambda = 0$ הוא ע"ע של A. זאת אומרת שקיים וקטור $v \neq 0$ שעבורו $Av = 0$. נסמן

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

נוכל להגיד שלפיכך

$$\begin{cases} a_{11}v_1 + \cdots + a_{1n}v_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}v_1 + \cdots + a_{nn}v_n = 0 \end{cases}$$

היא מערכת הומוגנית (בת n משוואות מ-n נעלמים). למערכת יש פתרון לא טריוויאלי, ולכן A אינה הפיכה.

$\boxed{\Rightarrow}$ נניח ש-A אינה הפיכה. נתבונן במערכת $Av = 0$. יש לה פתרון לא טריוויאלי $v \neq 0$, ולכן מתקיים $Av = 0 = 0 \cdot v$, זאת אומרת ש-$\lambda = 0$ הוא ע"ע של A.

□

הערה 2. A איננה הפיכה אם ורק אם $\det(A) = 0$.

משפט 2. *$\lambda \in \mathbb{F}$ הוא ערך עצמי של מטריצה $A \in M_n(\mathbb{F})$ אם ורק אם* $\det(\lambda I - A) = 0$.

הוכחה. $\lambda \in \mathbb{F}$ הוא ע"ע של A $\Leftrightarrow$ קיים $v \neq 0$ כך ש-$Av = \lambda v$ $\Leftrightarrow$ קיים $v \neq 0$ כך ש-$\lambda v - Av = 0$ $\Leftrightarrow$ קיים $v \neq 0$ כך ש-$(\lambda I - A)v = 0$ $\Leftrightarrow$ המטריצה $\lambda I - A$ אינה הפיכה $\Leftrightarrow \det(\lambda I - A) = 0$.

□

המשפט מאפשר לנו לחשב ערכים עצמיים מבלי לנסות לכפול וקטורים במטריצה בתקווה ש"ייצא טוב". לפי המשפט, כדי למצוא ערכים עצמיים של המטריצה נוכל לפתור את המשוואה $\det(\lambda I - A) = 0$. זהו פולינום ממעלה n, ובהמשך נקרא לו "הפולינום האופייני" של A, והוא ישחק תפקיד חשוב בתיאוריה שלנו.

נציג כעת מספר דוגמאות למציאת ערכים עצמיים.

דוגמה 1 (מטריצת היחידה). ניקח $A = I_n$, ונחפש את $\text{spec}(A)$. נבדוק בשתי שיטות:

שיטה ראשונה – חישוב ישיר נניח ש-$I_n v = \lambda v$. מכאן, $v = \lambda v$, כלומר $\lambda = 1$, כלומר spec $(I_n) = \{1\}$.

שיטה שנייה – לפי המשפט נשים לב כי

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

לכן, det $(\lambda I - A) = (\lambda - 1)^n$ אם כן, $(\lambda - 1)^n = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$, ולכן spec $(I_n) = \{1\}$.

לסיכום, הערך העצמי של מטריצת היחידה הוא 1, ומהחישוב שבחלק הראשון גילינו שכל הווקטורים הם וקטורים עצמיים שלו. זה אכן מתאים לדברים המוכרים - כל וקטור הכופלים במטריצת היחידה נשאר עצמו, המתיחה היא תמיד פי 1.

דוגמה 2 (מטריצה אלכסונית כללית). נסמן

$$A = D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

נרצה לדעת מהו spec (D). על פי המשפט, נסתכל על $\lambda I - D$:

$$\lambda I - D = \begin{pmatrix} \lambda - \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda - \alpha_n \end{pmatrix}$$

הדטרמיננטה: det $(\lambda I - A) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \alpha_i) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

קיבלנו ש-spec $(D) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$.

אבן, גם את התוצאה הזו יכולנו לצפות מראש! מטריצה אלכסונית מותחת בדיוק את וקטורי היחידה, $e_1, \ldots, e_n$ פי $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ בהתאמה.

דוגמה 3 (מטריצה משולשת עליונה). ניקח

$$A = T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

מטריצה משולשת עליונה.

על פי הוכחה דומה לזו של מטריצה אלכסונית - מקבלים spec $(T) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$.

דוגמה 4. ניקח מעל $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ את המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

אזי

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

לפי חישוב, det $(\lambda I - A) = \lambda^2 + 1 = 0$, אבל למשוואה זו אין פתרונות ב-$\mathbb{R}$.

אם כן, spec $(A) = \emptyset$.

נשאלת השאלה מה הקשר בין וקטורים עצמיים הקשורים לערכים עצמיים שונים. במילים אחרות, מה הקשר בין המרחבים העצמיים של מטריצה (או של אופרטור).

משפט 3. *ו"ע הקשורים לע"ע שונים הם בת"ל.*

הוכחה. יהיו $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ ע"ע שונים, ונסמן $v_1, \ldots, v_s$ הקשורים ל-$\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ בהתאמה. נוכיח $\{v_1, \ldots, v_s\}$ בת"ל. בשלילה, נניח ש-$\{v_1, \ldots, v_s\}$ ת"ל. אם כן, קיימת לה תת-קבוצה ת"ל מינימלית, נסמנה $\{v_1, \ldots, v_t\}$.

ניקח צירוף לינארי $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_t v_t = 0 \quad (1)$, כאשר קיים $1 \le i \le t$ שעבורו $\alpha_i \neq 0$. נפעיל את האופרטור T: $T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_t v_t) = T(0)$. אבל אלו וקטורים עצמיים, ולכן $\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + \alpha_t \lambda_t v_t = 0 \quad (\star)$.

נחזור ל-(1), ונכפול את המשוואה ב-λ_t: $\alpha_1 \lambda_t v_1 + \cdots + \alpha_t \lambda_t v_t = 0 \quad (\star\star)$.

נחסר $(\star\star) - (\star)$. נקבל את המשוואה $\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_t) v_1 + \cdots + \alpha_t (\lambda_{t-1} - \lambda_t) v_t = 0$.

כיוון ש-$t - 1 < t$, ותת-הקבוצה $\{v_1, \ldots, v_t\}$ היא הקטנה ביותר ות"ל, כל המקדמים בצירוף הלינארי מתאפסים, כלומר

$$\begin{cases} \alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_t) = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{t-1} (\lambda_{t-1} - \lambda_t) = 0 \end{cases}$$

כל הע"ע שונים, לכן $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{t-1} = 0$. נציב ב-$(1)$, ונקבל $\alpha_t v_t = 0$. אבל $v_t \neq 0$, ולכן $\alpha_t = 0$.

לסיכום, קיבלנו שאם $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_t v_t = 0 \quad (1)$, אזי $\alpha_1 = \cdots = \alpha_t = 0$, בסתירה להיות הקבוצה ת"ל.

לכן $\{v_1, \ldots, v_s\}$ בת"ל, כדרוש.

□

2 מרחבים עצמיים

הגדרה 3. תהי A מטריצה ריבועית, ויהי $\lambda \in \mathbb{F}$ ע"ע של A. נגדיר

$$V_\lambda(A) = \{v \in \mathbb{F}^n \mid Av = \lambda v\}$$

$V_\lambda(A)$ נקרא **המרחב העצמי** של A הקשור ל-λ.

בעצם, זוהי קבוצת כל הווקטורים העצמיים של A הקשורים ל-λ, ביחד עם וקטור האפס.

הערה 3. $V_\lambda(A)$ הוא תת-מרחב וקטורי של $V = \mathbb{F}^n$.

הוכחה. $0 \in V_\lambda(A)$ - טריוויאלי, מכיוון ש-$A \cdot 0 = 0 = \lambda \cdot 0$.

כמו כן, אם $v_1, v_2 \in V_\lambda(A)$ ו-$\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, מתקיים

$$A(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha A v_1 + \beta A v_2 = \alpha \lambda v_1 + \beta \lambda v_2 = \lambda(\alpha v_1 + \beta v_2)$$

ומכאן $\alpha v_1 + \beta v_2 \in V_\lambda(A)$.

□

3 מציאת ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים

הערה 4 (אלגוריתם למציאת וקטורים עצמיים). נניח שנתונה $A \in M_n(\mathbb{F})$.

1. מוצאים ערכים עצמיים על ידי פתרון המשוואה $\det(x \cdot I - A) = 0$.
2. לכל ערך עצמי λ מוצאים בסיס למרחב העצמי על ידי מציאת בסיס למרחב האפס $N(\lambda \cdot I - A)$.