1 ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של אופרטורים

הגדרה 1. **אופרטור לינארי** $T : V \to V$ הוא העתקה לינארית מ-V לעצמו.

הגדרה 2. יהי $T : V \to V$ אופרטור לינארי. אומרים ש-$\lambda \in \mathbb{F}$ הוא **ערך עצמי** (ע"ע) של האופרטור T אם קיים $0 \neq v \in V$ שעבורו $Tv = T(v) = \lambda v$. הוקטור v נקרא **וקטור עצמי** (ו"ע) של T הקשור ל-λ.

המשמעות זהה למטריצות - אילו וקטורים האופרטור מותח או מכווץ.

משפט 1. *יהי $T : V \to V$ אופרטור לינארי, יהי $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס של V ותהי A המטריצה המייצגת של T יחסית ל-B. אזי אם $\lambda \in \mathbb{F}$ הוא ערך עצמי של T, הוא גם ערך עצמי של A.*

הוכחה. נסמן

$$[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

A היא המטריצה המייצגת של T יחסית ל-B, ולכן $Tv = A \cdot [v]_B$. λ ע"ע של T, אזי קיים $v \neq 0$ כך ש-$Tv = \lambda v$, זאת אומרת $A \cdot [v]_B = \lambda [v]_B$, ולכן λ ע"ע של A.

□

הגדרה 3. נגדיר לכל ע"ע של אופרטור לינארי T, מרחב $V_\lambda (T) = \{v \in V \mid Tv = \lambda v\}$. $V_\lambda (T)$ נקרא **המרחב העצמי** של T הקשור ל-λ.

כמו במטריצות, זהו אוסף הווקטורים העצמיים עם אפס, וגם זה מרחב וקטורי (הוכחה דומה).

2 דמיון מטריצות

הגדרה 4. אומרים שמטריצה A **דומה** למטריצה B אם קיימת מטריצה הפיכה P שעבורה מתקיים $B = P^{-1}AP$. מסמנים זאת $A \sim B$.

הערה 1. דמיון הוא יחס שקילות, בלומר הוא:

1. <u>רפלקסיבי</u> - $A \sim A$.

   הוכחה. ניקח $P = I$ ונקבל את הדרוש.

   □

2. <u>סימטרי</u> - אם $A \sim B$ אזי $B \sim A$.

   הוכחה. אם $B = P^{-1}AP$ אזי $A = PBP^{-1}$.

   □

3. <u>טרנזיטיבי</u> - אם $A \sim B$ וגם $B \sim C$ אזי $A \sim C$.

הוכחה. אם $B=P^{-1}AP$ וגם $C=Q^{-1}BQ$ אזי $C=Q^{-1}P^{-1}APQ=$ $(PQ)^{-1}A(PQ)$.

□

הערה 2. אם V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$, $T:V\to V$ אופרטור לינארי, B_1,B_2 שני בסיסים של V, A_1,A_2 המטריצות המייצגות של T יחסית ל-B_1,B_2 בהתאמה ואם P מטריצת המעבר מ-B_1 ל-B_2, אזי $A_2=P^{-1}A_1P$.

ההערה הזו בעצם נותנת לנו אינטואיציה מה המשמעות של דמיון מטריצות: שתי מטריצות הן דומות אם ורק אם הן מייצגות את אותה העתקה בבסיסים שונים. אם כן, במהלך הקורס כשנדבר על דמיון נתייחס למטריצות, ואם נרצה לדבר בשפת העתקות נדבר על מציאת בסיס מתאים.

הערה 3. אם $A\neq I$, אזי A אינה דומה ל-I.

הוכחה. נניח בשלילה ש-$I\sim A$. זאת אומרת שקיימת P כך ש-$I=P^{-1}AP$. נכפול ב-P משמאל, ונקבל $P=AP$. נכפול ב-P^{-1} מימין, ונקבל $I=A$, בסתירה.

□

המשמעות של ההערה הקודמת - המטריצה המייצגת היחידה של העתקת הזהות היא מטריצת היחידה. אכן, ניתן לוודא זאת בקלות גם באמצעות כלים של לינארית 1. כעת נכליל את הטענה:

הערה 4. אם A איננה מטריצה סקלרית (זאת אומרת, $A\neq\alpha I$), אזי A אינה דומה לאף מטריצה סקלרית.

ההוכחה דומה לזו של ההערה הקודמת. נעיר שגם פה, כל מטריצה סקלרית היא מטריצה מייצגת של העתקת מתיחה / כיווץ, כלומר העתקת הזהות כפול סקלר כלשהו. גם במקרה זה ניתן לחשב ישירות את המטריצה המייצגת, ולגלות שהיא תמיד אותה סקלרית.

משפט 2. *אם A_1,A_2 מטריצות דומות אזי* $\text{spec}(A_1)=\text{spec}(A_2)$.

הוכחה. יהי λ ע"ע של A_1 בה"כ, לכן לפי משפט $\det(\lambda I-A_1)=0$. $A_1\sim A_2$, לכן קיימת מטריצה P הפיכה שעבורה $A_2=P^{-1}A_1P$. נשים לב כי

$$\det(\lambda I-A_2)=\det\left(\lambda P^{-1}P-P^{-1}A_1P\right)=$$

$$=\det\left(P^{-1}(\lambda I-A_1)P\right)=\det\left(P^{-1}\right)\det(\lambda I-A_1)\det(P)=0$$

ולכן לפי משפט λ ע"ע של A_2.

מכאן נגיע למסקנה כי $\text{spec}(A_1)=\text{spec}(A_2)$.

□

במילים אחרות, אם שתי מטריצות הן דומות, יש להן אותם ערכים עצמיים (אך לא אותם וקטורים עצמיים בהכרח!). אם כן, נוכל להגיע למסקנה הבאה:

מסקנה 3. $\text{spec}(T)=\text{spec}(A)$ *למטריצה מייצגת A כלשהי.*

הערה 5. אם $A_1\sim A_2$, אזי $\det(A_1)=\det(A_2)$.

בעת ננסה להתעסק בשאלה כללית: מתי מטריצה נתונה A דומה למטריצה אלכסונית.

3 לבסון מטריצות

הגדרה 5. אומרים שמטריצה A **לכסינה** (או ניתנת ללכסון) אם A דומה למטריצה אלכסונית D, כלומר אם קיימת מטריצה הפיכה P כך ש- $P^{-1}AP$ מטריצה אלכסונית. המטריצה P נקראת **המטריצה המלכסנת**.

הערה 6. לכסון עוזר בהעלאה בחזקה של מטריצה. הסבר:

נניח ש-A לכסינה ו-$k \in \mathbb{N}$. נניח ש-P היא המטריצה המלכסנת של A, ונניח שהמטריצה $D = P^{-1}AP$ היא מטריצה אלכסונית. אזי:

$$A^k = \left(PDP^{-1}\right)^k = \underbrace{\left(PDP^{-1}\right)\left(PDP^{-1}\right)\cdots\left(PDP^{-1}\right)}_{k \text{ times}} = PD^kP^{-1}$$

לבאורה, לא נפטרנו מהבעיה; עדיין צריך להעלות מטריצה בחזקה גבוהה. אבל D אלכסונית, נניח

$$D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

אזי

$$D^k = \begin{pmatrix} \alpha_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n^k \end{pmatrix}$$

וזה קל לחישוב!

משפט 4 (קריטריון בסיסי ללכסון מטריצה). *מטריצה A לכסינה אם ורק אם יש ב-F^n בסיס המורכב מוקטורים עצמיים של A.*

אם

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

אזי איברי הבסיס הנ"ל הם עמודות המטריצה P.

הוכחה. $\boxed{\Leftarrow}$ נניח שהמטריצה A לכסינה,

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

נסמן $e_1, \ldots, e_n$ וקטורי היחידה. ניקח $i = 1, \ldots, n$, ונשים לב כי

$$P^{-1}APe_i = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_i e_i$$

לבן e_i ו"ע של $P^{-1}AP$ הקשור לע"ע λ_i ($A \sim P^{-1}AP$, לכן λ_i ע"ע של A).
קיבלנו כי

$$P^{-1}APe_i = \lambda_i e_i$$

נכפול ב-P משמאל, ואז

$$A(Pe_i) = \lambda_i (Pe_i)$$

נסמן $v_i = Pe_i$, לכן

$$Av_i = \lambda_i v_i$$

$$v_i = \begin{pmatrix} | & & | \\ p_1 & \cdots & p_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

$\boxed{\Rightarrow}$ נניח שקיים בסיס $\{v_1, \dots, v_n\}$ המורכב מו"ע של A. נוכיח ש-A לכסינה. נגדיר

$$P = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

$Pe_i = v_i$, לכן $e_i = P^{-1}v_i$. נשים לב כי:

$$AP = A\begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ Av_1 & \cdots & Av_n \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ \lambda_1 v_1 & \cdots & \lambda_n v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

ובעת, נראה כי

$$P^{-1}AP = P^{-1}\begin{pmatrix} | & & | \\ \lambda_1 v_1 & \cdots & \lambda_n v_n \\ | & & | \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} | & & | \\ \lambda_1 P^{-1}v_1 & \cdots & \lambda_n P^{-1}v_n \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

ולכן מצאנו מטריצה הפיכה P כך ש-$P^{-1}AP$ אלכסונית, בדרוש.

$\square$

הערה 7. איברי האלכסון הראשי של מטריצה אלכסונית הם הערכים העצמיים שלה.

1.3 דוגמה – בלוק ז'ורדן

הגדרה 6. מטריצה מהצורה

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

(מגודל $n \times n$) נקראת **בלוק (או תא) ז'ורדן** מגודל n.

טענה 5. *אם $n \geq 2$, אזי J_λ איננה לכסינה.*

הוכחה. נחפש ו"ע של $J_n(\lambda)$. יהי

$$v = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

ו"ע של $J_n(\lambda)$. λ הוא הע"ע היחיד של $J_n(\lambda)$ (כי הוכחנו כאשר דיברנו על ע"ע שעבור מטריצה משולשת, הע"ע הם האיברים שעל האלכסון הראשי שלה). נשים לב:

$$J_n(\lambda)v = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_1 + \alpha_2 \\ \vdots \\ \lambda\alpha_{n-1} + \alpha_n \\ \lambda\alpha_n \end{pmatrix} = \lambda v = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_1 \\ \vdots \\ \lambda\alpha_{n-1} \\ \lambda\alpha_n \end{pmatrix}$$

קיבלנו מערכת משוואות:

$$\begin{cases} \lambda\alpha_1 + \alpha_2 = \lambda\alpha_1 \\ \vdots \\ \lambda\alpha_{n-1} + \alpha_n = \lambda\alpha_{n-1} \\ \lambda\alpha_n = \lambda\alpha_n \end{cases} \Rightarrow \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$$

לכן כל ו"ע של $J_n(\lambda)$ הוא מהצורה

$$v = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

אבל

$$V_\lambda(J_n(\lambda)) = \{v \in \mathbb{F}^n \mid J_n(\lambda)v = \lambda v\}$$

מרחב וקטורי ממימד 1, לכן למרחב הוקטורי $\mathbb{F}^n$ אין בסיס המורכב מו"ע של $J_n(\lambda)$, ולכן $J_n(\lambda)$ אינו לכסין.

□

בעצם, מה הפריע לנו? לא היו מספיק וקטורים עצמיים לערך העצמי λ. בלוק ז'ורדן הוא דוגמה חשובה, והיא תחזור בהמשך הקורס ותקבל תפקיד משמעותי ביותר.

4 לכסון אופרטורים

הגדרה 7. יהי $T : V \to V$ אופרטור לינארי. אומרים ש-T **לכסין (ניתן ללכסון)** אם קיים בסיס B של V כך שהמטריצה המייצגת A של T יחסית ל-B אלכסונית.

בעצם, כהרגלנו, המרנו את הבעיה של אופרטורים לבעיה של מטריצות. שיטה זו תחזור מספר פעמים בקורס, וכל טענה שנוכיח לאחד מהסוגים (מטריצות או אופרטורים) תהיה נכונה באופן אוטומטי גם לסוג השני, עקב השקילות ביניהם (מלינארית 1). דוגמה לכך היא הטענה הבאה, שלא נוכיח:

משפט 6 (קריטריון בסיסי ללכסון אופרטור). *אופרטור $T : V \to V$ ניתן ללכסון אם ורק אם קיים בסיס B של V המורכב מו"ע של T.*