1 מרחבים עצמיים

הגדרה 1. תהי A מטריצה ריבועית, ויהי $\lambda \in \mathbb{F}$ ע"ע של A. נגדיר

$$V_\lambda(A) = \{v \in \mathbb{F}^n \mid Av = \lambda v\}$$

$V_\lambda(A)$ נקרא **המרחב העצמי** של A הקשור ל-λ.

בעצם, זוהי קבוצת כל הווקטורים העצמיים של A הקשורים ל-λ, ביחד עם וקטור האפס.

הערה 1. $V_\lambda(A)$ הוא תת-מרחב וקטורי של $V = \mathbb{F}^n$.

הוכחה. $0 \in V_\lambda(A)$ - טריוויאלי, מכיוון ש-$A \cdot 0 = 0 = \lambda \cdot 0$.
כמו כן, אם $v_1, v_2 \in V_\lambda(A)$ ו-$\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, מתקיים

$$A(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha A v_1 + \beta A v_2 = \alpha\lambda v_1 + \beta\lambda v_2 = \lambda(\alpha v_1 + \beta v_2)$$

ומכאן $\alpha v_1 + \beta v_2 \in V_\lambda(A)$.

□

הגדרה 2. נגדיר לכל ע"ע של אופרטור לינארי T, מרחב $V_\lambda(T) = \{v \in V \mid Tv = \lambda v\}$. $V_\lambda(T)$ נקרא **המרחב העצמי** של T הקשור ל-λ.

כמו במטריצות, זהו אוסף הווקטורים העצמיים עם אפס, וגם זה מרחב וקטורי (הוכחה דומה).

2 לבסון אופרטורים

הגדרה 3. יהי $T : V \to V$ אופרטור לינארי. אומרים ש-T **לכסין (ניתן ללכסון)** אם קיים בסיס B של V כך שהמטריצה המייצגת A של T יחסית ל-B אלכסונית.

בעצם, בהרגלנו, המרנו את הבעיה של אופרטורים לבעיה של מטריצות. שיטה זו תחזור מספר פעמים בקורס, וכל טענה שנוכיח לאחד מהסוגים (מטריצות או אופרטורים) תהיה נכונה באופן אוטומטי גם לסוג השני, עקב השקילות ביניהם (מלינארית 1). דוגמה לכך היא הטענה הבאה, שלא נוכיח:

משפט 1 (קריטריון בסיסי ללכסון אופרטור). *אופרטור $T : V \to V$ ניתן ללכסון אם ורק אם קיים בסיס B של V המורכב מו"ע של T.*

3 הפולינום האופייני

הגדרה 4. תהי A מטריצה ריבועית מגודל $n \times n$. $p_A(x) = \det(xI_n - A))$ נקרא **הפולינום האופייני** של המטריצה A.

חשוב לשים לב שזהו פולינום; האיברים במטריצה $xI_n - A$ הם פולינומים לכל היותר ממעלה 1. דטרמיננטה היא, בסך הכל, סכום של מכפלות של איברים מתוך המטריצה. לכן, גם התוצאה היא פולינום.

פולינום זה אמור להיות מוכר; כאשר דיברנו על ערכים עצמיים ועל וקטורים עצמיים, הוא היה חלק מהאלגוריתם למציאת ערכים עצמיים.

משפט 2 (תבונות הפולינום האופייני). *לפולינום האופייני התכונות הבאות:*

1. *השורשים של* $p_A(x)$ *הם הע"ע של* A.
2. *אם* A *מטריצה משולשת,*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \star \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

אזי $p_A(x) = \prod_{i=1}^{n}(x-\lambda_i)$.

3. $p_A(x)$ *הוא פולינום מתוקן. זאת אומרת, המקדם הראשי / המוביל שלו שווה ל-*1.
4. $\deg(p_A(x)) = n$.
5. *אם* $p_A(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$*, אזי* $a_0 = (-1)^n \cdot \det(A)$ *וגם* $a_{n-1} = -tr(A)$.

הוכחה. **1** לפי טענה שראינו בהרצאה הראשונה.

2 המטריצה

$$xI - A = \begin{pmatrix} x-\lambda_1 & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & x-\lambda_n \end{pmatrix}$$

גם היא משולשת, ולכן הדטרמיננטה שלה היא מכפלת איברי האלכסון. אם כן,

$$p_A(x) = \det(xI - A) = \prod_{i=1}^{n}(x-\lambda_i)$$

3,4,5

$$p_A(x) = \det(xI_n - A) = \det\begin{pmatrix} x-a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & x-a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma)\, c_{1\sigma(1)}\ldots c_{n\sigma(n)} = x^n + x^{n-1}(-a_{11} - a_{22} - \cdots - a_{nn}) + \cdots + a_0$$

מהפיתוח הנ"ל, סעיפים 3 ו-4 נובעים באופן מיידי. נותר להוכיח את סעיף 5:

$$a_0 = p_A(0) = \det(0I_n - A) = \det(-A) = (-1)^n \det(A)$$

□

הערה 2. למטריצות דומות אותו הפולינום האופייני. בכיוון ההפוך - איננו נכון.

הוכחה. אם $A \sim A'$, אזי קיימת P כך ש-$A' = P^{-1}AP$. אם כן,

$$p_{A'}(x) = \det(xI - A') = \det\left(xI - P^{-1}AP\right) = \det\left(xP^{-1}IP - P^{-1}AP\right) =$$

$$= \det\left(P^{-1}(xI - A)P\right) = \det\left(P^{-1}\right)\det(xI - A)\det(P) =$$

$$= \frac{1}{\det(P)} \det(xI - A)\det(P) = \det(xI - A) = p_A(x)$$

הפרכת הכיוון הנגדי: ניקח

$$A = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A' = J_2(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

מניתוח קודם, $A \nsim A'$, אבל קל לוודא שאכן $p_A(x) = p_{A'}(x)$.

$\square$

ראינו בהערה הקודמת שאם שתי מטריצות דומות, הפולינום האופייני שלהן זהה. כמו כן, אנו יודעים ששתי מטריצות מייצגות של אופרטור (בבסיסים שונים) דומות זו לזו. אם כן, ההגדרה הבאה מוגדרת היטב:

הגדרה 5. יהי $T : V \to V$ אופרטור לינארי. נגדיר $p_T(x) = p_A(x)$, כש-A היא המטריצה המייצגת של T ביחס לבסיס B כלשהו.

4 פולינומים (על קצה המזלג)

נתחיל ממשפט, המוכר מהלימודים כבר בתיכון. אנו יודעים כי אם יש לנו שני פולינומים, אפשר לחלק אחד בשני, ולקבל מנה ושארית. המשפט הבא מנסח את הטענה באופן כללי:

משפט 3. *יהיו $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$ פולינומים, $\deg(f) \geq 1$, $\deg(g) \geq 1$ (כזכור, $\deg$ = הדרגה של הפולינום). אזי קיימים פולינומים $q(x)$ (המנה) ו-$r(x)$ (השארית) שעבורם:*

1. *$f(x) = q(x)g(x) + r(x)$.*
2. *$r(x) = 0$ או $\deg(r) < \deg(g)$.*

לא נוכיח את המשפט בקורס זה.

הערה 3. נעיר מספר הערות על המשפט.

1. בתנאי השני, הסיבה למקרה $r(x) = 0$ היא ש-$\deg(0)$ אינו מוגדר.
2. אם $\deg(f) < \deg(g)$, אז החלוקה הינה $f(x) = 0 \cdot g(x) + f(x)$.
3. השוויון בתנאי הראשון הוא שוויון פולינומים (ולא רק של קבוצות הערכים שלהם). בדוגמה הבאה נראה דוגמה לשני פולינומים שונים, המקבלים אותה קבוצת ערכים.

דוגמה 1. נדגים שני פולינומים שונים עם אותן קבוצות ערכים, זאת אומרת $f \neq g$, אבל לכל $x \in \mathbb{F}$ מתקיים $f(x) = g(x)$.

עבור השדה $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_2$, הפולינומים $f(x) = x$ ו-$g(x) = x^2$ מקיימים את הדרישות האלו. זה נכון, מפני שמתקיים

$$0^2 = 0, \quad 1^2 = 1$$

דוגמה 2. נדגים את חלוקת הפולינומים $f(x)=x^3-2$ ב-$g(x)=x-2$. כאן אין הבדל אם השדה יהיה $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$, אך בדוגמאות אחרות ייתכן שיהיה הבדל בין החלוקות (לפי המקדמים של הפולינומים - למשל, אם יש מקדם אי רציונלי, אי אפשר לעבוד מעל הרציונליים).

$$
\begin{array}{r|l}
\multicolumn{1}{r}{x^2+2x+4} & \\ \hline
x^3 \qquad\qquad -2 & x-2 \\
\underline{x^3-2x^2} & \\
2x^2 & \\
\underline{2x^2+4x} & \\
4x-2 & \\
\underline{4x-8} & \\
6 &
\end{array}
$$

לסיכום, מתקיים $x^3-2=\left(x^2+2x+4\right)(x-2)+6$.