1 המרחב הדואלי

תזכורת:

הגדרה 1. יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל השדה $\mathbb{F}$. נתבונן ב-$\mathbb{F}$ בתור מרחב וקטורי מעל עצמו ($\dim_{\mathbb{F}}\mathbb{F}=1$, $\{1\}$ בסיס). אומרים שהעתקה לינארית $\varphi:V\to\mathbb{F}$ היא **פונקציונל לינארי על V**.

הגדרה 2. $V^*=\{\varphi:V\to\mathbb{F}$ אוסף כל הפונקציונלים הלינאריים$\}$ נקרא **המרחב הדואלי** ל-V. מגדירים עליו פעולות חיבור וכפל בסקלר, כך שהוא הופך למרחב וקטורי, בצורה הבאה:

$$(\varphi_1+\varphi_2)(v)=\varphi_1(v)+\varphi_2(v)\qquad(\alpha\varphi)(v)=\alpha\varphi(v)$$

הערה 1. $\dim V^*=n$, ולכן V^* איזומורפי ל-V.

בעת נרצה לכל בסיס להתאים בסיס במרחב הדואלי, "בסיס דואלי". ההתאמה הזו תייצר לנו בהמשך את האיזומורפיזם בין המרחב למרחב הדואלי.

הגדרה 3. יהי $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס של V. נגדיר בסיס $B^*=\{\varphi_1,\dots,\varphi_n\}$ של V^*, שייקרא **הבסיס הדואלי ל-B**, על ידי

$$\varphi_i(v_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

לכל $i=1,\dots,n$, ולכל $j=1,\dots,n$, ונמשיך כל φ_i לפי לינאריות. כלומר, אם ניקח וקטור כלשהו $v=\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_nv_n$, אזי

$$\varphi_i(v)=\alpha_1\underbrace{\varphi_i(v_1)}_{0}+\cdots+\alpha_i\underbrace{\varphi_i(v_i)}_{1}+\cdots+\alpha_n\underbrace{\varphi_i(v_n)}_{0}=\alpha_i$$

מההגדרה קיבלנו את הנוסחה

$$[v]_B=\begin{pmatrix}\varphi_1(v)\\ \vdots\\ \varphi_n(v)\end{pmatrix}$$

נוודא כעת שהבסיס הדואלי הוא אכן בסיס.

בת"ל נניח כי $\alpha_1\varphi_1+\cdots+\alpha_n\varphi_n=0$.

נתבונן בערך של שני הצדדים עבור הווקטור v_i:

$$\alpha_1\underbrace{\varphi_1(v_i)}_{0}+\cdots+\alpha_i\underbrace{\varphi_i(v_i)}_{1}+\cdots+\alpha_n\underbrace{\varphi_n(v_i)}_{0}=0\Rightarrow\alpha_i=0$$

לכן B^* בת"ל. $\dim V^*=n$, וכן $|B^*|=n$, ולכן B^* בסיס של V^*. בעיקרון, נוכל להפסיק פה, אך כעת, באמצעות הפרישה, נפתח נוסחה חשובה:

פורשת אם $\varphi \in V^*$, אזי $\varphi = \varphi(v_1)\varphi_1 + \cdots + \varphi(v_n)\varphi_n$.

בדיקה: נציב v_i בשני הצדדים, ונקבל:

$$\varphi(v_1)\underbrace{\varphi_1(v_i)}_{0} + \cdots + \varphi(v_i)\underbrace{\varphi_i(v_i)}_{1} + \cdots + \varphi(v_n)\underbrace{\varphi_n(v_i)}_{0} = \varphi(v_i)$$

אם כן, נקבל נוסחה חשובה נוספת:

$$[\varphi]_{B^*} = \begin{pmatrix} \varphi(v_1) \\ \vdots \\ \varphi(v_n) \end{pmatrix}$$

הערה 2. ציינו שתי נוסחאות חשובות קודם, ובעזרתן נבנה איזומורפיזם מפורש $V \to V^*$. ניקח בסיס B של V. נניח שנתון $v \in V$, כך שווקטור הקואורדינטות שלו ביחס לבסיס B הוא

$$[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(v) \\ \vdots \\ \varphi_n(v) \end{pmatrix}$$

נשלח את v ל-φ, כך שווקטור הקואורדינטות של φ לפי B^* זהה לווקטור הקואורדינטות של v לפי B, ז"א

$$[\varphi]_{B^*} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(v_1) \\ \vdots \\ \varphi(v_n) \end{pmatrix}$$

אם כן, הקונסטרוקציה של האיזומורפיזם תלויה בבחירת הבסיס B; בחירות שונות של בסיסים יובילו לאיזומורפיזמים שונים.

נרצה לראות כיצד שינוי הבסיס משפיע על הבסיס הדואלי, ונמצא קשר בין מטריצות המעבר המתאימות.

משפט 1. *יהיו $B, \tilde{B}$ בסיסים של V, יהיו $B^*, \tilde{B}^*$ הבסיסים הדואליים המתאימים של V^*, תהי C מטריצת המעבר מ-B ל-$\tilde{B}$ ותהי C' מטריצת המעבר מ-B^* ל-$\tilde{B}^*$. אזי $C' = \left(C^{-1}\right)^t = \left(C^t\right)^{-1}$.*

הוכחה. נוכיח שמטריצת המעבר מ-$\tilde{B}^*$ ל-B^* שווה ל-C^t. נסמן מטריצה זו ב-$C'' = \left(C'\right)^{-1}$.

נסמן $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $\tilde{B} = \{w_1, \ldots, w_n\}$, $B^* = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, $\tilde{B}^* = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$. אזי

$$C'' = \begin{pmatrix} | & & | \\ [\varphi_1]_{\tilde{B}^*} & \cdots & [\varphi_n]_{\tilde{B}^*} \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(w_1) & \cdots & \varphi_n(w_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(w_n) & \cdots & \varphi_n(w_n) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} - & \left([w_1]_B\right)^t & - \\ & \vdots & \\ - & \left([w_n]_B\right)^t & - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ [w_1]_B & \cdots & [w_n]_B \\ | & & | \end{pmatrix}^t = C^t$$

הוכחנו $C'' = C^t$, ולכן $C' = \left(C''\right)^{-1} = \left(C^t\right)^{-1}$.

$\square$

2 המרחב הדואלי השני

הגדרה 4. $V^{**}=\left(V^{*}\right)^{*}$ נקרא **המרחב הדואלי השני ל-V**.

הערה 3. $\dim V^{**}=\dim V^{*}=\dim V$, ולכן $V^{**}\cong V$.

הערה 4. נחפש איזומורפיזם מהמרחב למרחב הדואלי השני. הפעם, לעומת האיזומורפיזם מהמרחב לדואלי שלו, אפשר לבנות איזומורפיזם זה בלי לבחור בסיס ב-V - איזומורפיזם טבעי.

נגדיר לכל $\varphi\in V^{*}$, $\hat{v}\left(\varphi\right)=\varphi\left(v\right)$ (**איזומורפיזם ההצבה**).

בדיקות:

1. נבדוק כי $\hat{v}\in V^{**}$.

$$\hat{v}\left(\alpha\varphi_{1}+\beta\varphi_{2}\right)=\left(\alpha\varphi_{1}+\beta\varphi_{2}\right)\left(v\right)=\alpha\varphi_{1}\left(v\right)+\beta\varphi_{2}\left(v\right)=\alpha\hat{v}\left(\varphi_{1}\right)+\beta\hat{v}\left(\varphi_{2}\right)$$

2. נסמן $E:V\to V^{**}$, כאשר $E\left(v\right)=\hat{v}$. נבדוק ש-E איזומורפיזם של מרחבים וקטוריים.

לינאריות נבדוק האם $E\left(\alpha v_{1}+\beta v_{2}\right)=\alpha E\left(v_{1}\right)+\beta E\left(v_{2}\right)$. נחשב את הערך של שני הצדדים עבור איזשהו $\varphi\in V^{*}$:

$$E\left(\alpha v_{1}+\beta v_{2}\right)\left(\varphi\right)=\left(\widehat{\alpha v_{1}+\beta}v_{2}\right)\left(\varphi\right)=\varphi\left(\alpha v_{1}+\beta v_{2}\right)=\alpha\varphi\left(v_{1}\right)+\beta\varphi\left(v_{2}\right)=$$

$$=\alpha\hat{v_{1}}\left(\varphi\right)+\beta\hat{v_{2}}\left(\varphi\right)=\left(\alpha\hat{v_{1}}+\beta\hat{v_{2}}\right)\left(\varphi\right)=\left(\alpha E\left(v_{1}\right)+\beta E\left(v_{2}\right)\right)\left(\varphi\right)$$

חח"ע נבדוק ש-E חח"ע, כלומר $\ker E=0$. יהי $v\in\ker E$, ז"א $\hat{v}=0$. נגדיר $B=\left\{ v_{1},\ldots,v_{n}\right\}$ בסיס של V, ויהי $B^{*}=\left\{ \varphi_{1},\ldots,\varphi_{n}\right\}$ הבסיס הדואלי.
נשים לב כי לכל $i=1,\ldots,n$ מתקיים $\varphi_{i}\left(v\right)=\hat{v}\left(\varphi_{i}\right)=0$, ולכן $\left[v\right]_{B}=0$, כלומר $v=0$.

ממשפט המימדים, נקבל ש-E העתקת על, ז"א E איזומורפיזם.

כל בסיס של V^{*} הוא דואלי לבסיס של V.

הוכחה. יהי B' בסיס של V^{*}, נסמן $B'=\left\{ \varphi_{1},\ldots,\varphi_{n}\right\}$. נתבונן בבסיס $B''=\left\{ e_{1},\ldots,e_{m}\right\}$ של V^{**} הדואלי ל-B'. ז"א, מתקיים $e_{i}\left(\varphi_{j}\right)=\delta_{ij}$. נגדיר $v_{i}=E^{-1}\left(e_{i}\right)$, כאשר $E^{-}1:V^{**}\to V$ הוא האיזומורפיזם ההפוך ל-E שהגדרנו. נגדיר $B=\left\{ v_{1},dots,v_{n}\right\}$, ונוכיח $B^{*}=B'$. אכן, מתקיים

$$\varphi_{j}\left(v_{i}\right)=\hat{v}_{i}\left(\varphi_{j}\right)=e_{i}\left(\varphi_{j}\right)=\delta_{ij}$$

□

3 מאפס

הגדרה 5. יהי V מרחב וקטורי, ותהי $S \subseteq V$ תת-קבוצה. נגדיר

$$S^0 = \{\varphi \in V^* \mid \forall v \in S : \varphi(v) = 0\}$$

כלומר, זה אוסף כל הפונקציונלים הלינאריים המתאפסים על כל S. אזי S^0 נקרא **המאפס של** S.

הערה 5. תכונות המאפס:

1. $S^0 \subseteq V^*$ הוא תת-מרחב.

הוכחה. אם $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, ואם $\varphi_1, \varphi_2 \in S^0$, אזי לכל $v \in S$ מתקיים

$$(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2)(v) = \alpha\varphi_1(v) + \beta\varphi_2(v) = 0$$

□

2. $S^0 = (\mathsf{Span}\, S)^0$

הוכחה. נוכיח באמצעות הכלה דו-כיוונית.

$\boxed{\supseteq}$ ההכלה הזו ברורה, כי אם $\varphi \in (\mathsf{Span}\, S)^0$, אזי לכל $v \in \mathsf{Span}\, S$ מתקיים $\varphi(v) = 0$, ובפרט זה נכון עבור $v \in S$.

$\boxed{\subseteq}$ יהי $\varphi \in S^0$, ויהי $v \in \mathsf{Span}\, S$. נסמן $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$, כאשר $v_1, \ldots, v_k \in S$. אזי

$$\varphi(v) = \varphi(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k) = \alpha_1\varphi(v_1) + \cdots + \alpha_k\varphi(v_k) = 0$$

וקיבלנו הדרוש.

□

3. אם $U \subseteq V$ תת-מרחב, אזי $\mathsf{dim}\, U + \mathsf{dim}\, U^0 = \mathsf{dim}\, V$.

הוכחה. ניקח בסיס $B' = \{v_1, \ldots, v_k\}$ של U, ונשלים אותו לבסיס $B = \{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ של V. נסמן $B^* = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ הבסיס הדואלי של B. נסתכל על הפונקציונלים $\{\varphi_{k+1}, \ldots, \varphi_n\}$, ונוכיח שהם בסיס של U^0. לצורך כך, נוכיח שהם קבוצה בת"ל ופורשת.

הם בבירור בת"ל, כחלק מבסיס.

נוסיף להם פונקציונל $\psi = \alpha_1\varphi_1 + \cdots + \alpha_n\varphi_n \in U^0$. אזי לכל $i = 1, \ldots, k$ נקבל

$$0 = \psi(v_i) = \alpha_1 \underbrace{\varphi_1(v_i)}_{0} + \cdots + \alpha_i \underbrace{\varphi_i(v_i)}_{1} + \cdots + \alpha_n \underbrace{\varphi_n(v_n)}_{0} = \alpha_i$$

ולכן ψ נפרש על ידי $\{\varphi_{k+1}, \ldots, \varphi_n\}$.

לסיכום, נקבל

$$\dim U+\dim U^0=|B'|+|\{\varphi_{k+1},\dots,\varphi_n\}|=k+(n-k)=n=\dim V$$

$\square$

4. לכל $U\subseteq V$ תת-מרחב, $U^{00}=E[U]=\{\hat{u}\mid u\in U\}$.

הוכחה. $\boxed{\subseteq}$ יהי $v\in E[U]$, אזי קיים $u\in U$ שעבורו $v=E(u)=\hat{u}$. יהי $\varphi\in U^0$ פונקציונל לינארי. אזי $\hat{u}(\varphi)=\varphi(u)=0$, ולכן $v=\hat{u}\in U^{00}$.

שוויון מימדים לפי תבונה 3, $\dim U+\dim U^0=\dim V$, אבל גם $\dim U^0+\dim U^{00}=\dim V$. לכן, המימדים שלהם שווים; $\dim U=\dim U^{00}$. איזומורפיזם שומר על המימד, ולכן $\dim U=\dim E[U]$. בסך הכל, $\dim U^{00}=\dim E[U]$.

הוכחנו הכלה ושוויון מימדים, ולכן יש שוויון.

$\square$