1 המשך אופרטורים ומטריצות מסוגים מיוחדים

הוכחנו קריטריון לנורמליות וקריטריון לאוניטריות, ובעת נסתכל על מטריצות.

משפט 1. *תהי A מטריצה ריבועית כלשהי, תהי $\langle\ ,\ \rangle$ המכפלה הפנימית הסטנדרטית ב-$\mathbb{F}^n$, ותהי A^* המטריצה הצמודה ל-A (ז"א $A^*=\overline{A}^t$). אזי:*

1. *לכל $u,v\in\mathbb{F}^n$, מתקיים $\langle Au,v\rangle=\langle u,A^*v\rangle$.*
2. *אם A נורמלית, אזי $\|A^*v\|=\|Av\|$ לכל $v\in\mathbb{F}^n$.*
3. *אם A אוניטרית, אזי $\|v\|=\|Av\|$ לכל $v\in\mathbb{F}^n$.*

הוכחה. נשתמש בעובדה שיחסית לבסיס אורתונורמלי, המטריצה המייצגת של $T^*:V\to V$ שווה ל-A^*, בש-A המטריצה המייצגת ל-T.

נסתכל על האופרטור $T=L_A(v)=Av$. המטריצה המייצגת שלו יחסית לבסיס הסטנדרטי היא A.

1. לכל $u,v\in\mathbb{F}^n$,

$$\langle Au,v\rangle=\langle T(u),v\rangle=\langle u,T^*(v)\rangle=\langle u,A^*v\rangle$$

2. אם A נורמלית, אזי גם T נורמלית, ז"א $T^*T=TT^*$, ולכן לכל $v\in\mathbb{F}^n$:

$$\|Av\|^2=\|T(v)\|^2=\langle T(v),T(v)\rangle=\langle v,T^*T(v)\rangle=$$

$$=\langle v,TT^*(v)\rangle=\langle T^*(v),T^*(v)\rangle=\|T^*(v)\|^2=\|A^*v\|^2$$

ולכן $\|Av\|=\|A^*v\|$.

3. אם A אוניטרית, אזי גם T אוניטרית, ז"א $T^*T=I$, ולכן לכל $v\in\mathbb{F}^n$:

$$\|Av\|^2=\|T(v)\|^2=\langle T(v),T(v)\rangle=\langle v,T^*T(v)\rangle=\langle v,I(v)\rangle=\langle v,v\rangle=\|v\|^2$$

ולכן $\|Av\|=\|v\|$.

$\square$

הערה 1. אפשר להוכיח את המשפט הקודם מבלי להשתמש בתכונות של T.

1.1 ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של מטריצות נורמליות ושל מטריצות צמודות לעצמן

נניח שיש לנו מטריצה נורמלית. ננסה לבדוק מהו הקשר בין הערכים העצמיים והווקטורים העצמיים שלה לבין אלו של המטריצה הצמודה לה.

משפט 2. *אם A מטריצה נורמלית, λ ערך עצמי של A ו-v וקטור עצמי של A הקשור ל-λ, אזי v הוא גם וקטור עצמי של A^* הקשור ל-$\overline{\lambda}$.*

הוכחה. נתון כי A נורמלית. נוכיח כי $\lambda I - A$ גם היא נורמלית:

$$(\lambda I - A)(\lambda I - A)^* = (\lambda I - A)\left(\overline{\lambda} I - A^*\right) = \lambda\overline{\lambda} I - \overline{\lambda} A I - \lambda I A^* + A A^* = |\lambda|^2 - \overline{\lambda} A - \lambda A^* + A A^*$$

$$(\lambda I - A)^* (\lambda I - A) = \left(\overline{\lambda} I - A^*\right)(\lambda I - A) = \overline{\lambda}\lambda I - \lambda A^* I - \overline{\lambda} I A + A^* A = |\lambda|^2 - \overline{\lambda} A - \lambda A^* + A^* A$$

ויש שוויון בין שני הביטויים, כי A נורמלית.
אם כן, מתקיים:

$$Av = \lambda v \Rightarrow (\lambda I - A)v = 0 \Rightarrow \|(\lambda I - A)v\| = \|0\| = 0$$

אבל $\lambda I - A$ נורמלית, ולכן מתקיים:

$$\|(\lambda I - A)v\| = 0 \Rightarrow \left\|(\lambda I - A)^* v\right\| = 0 \Rightarrow (\lambda I - A)^* v = 0 \Rightarrow \left(\overline{\lambda} I - A^*\right)v = 0 \Rightarrow A^* v = \overline{\lambda} v$$

□

לאור המשפט הקודם, נוכל להגיע למסקנה לגבי הקשר בין וקטורים עצמיים של מטריצה נורמלית הקשורים לערכים עצמיים שונים.
אם A מטריצה נורמלית, λ, μ ערכים עצמיים שונים של A, ו-u, v וקטורים עצמיים של A הקשורים ל-λ, μ בהתאמה, אזי $u \perp v$.

הוכחה.

$$\langle Au, v\rangle = \langle u, A^* v\rangle \Rightarrow \langle \lambda u, v\rangle = \langle u, \overline{\mu} v\rangle \Rightarrow \lambda \langle u, v\rangle = \mu \langle u, v\rangle \underset{\lambda \neq \mu}{\Rightarrow} \langle u, v\rangle = 0 \Rightarrow u \perp v$$

□

תהי A מטריצה צמודה לעצמה. אזי כל הערכים העצמיים של A ממשיים.

הוכחה. $A^* = A$, ולכן A נורמלית.
יהי λ ערך עצמי של A, ויהי v ו"ע של A הקשור ל-λ. אזי

$$\lambda v = Av = A^* v = \overline{\lambda} v$$

$v \neq 0$, ולכן $\lambda = \overline{\lambda}$, ומכאן $\lambda \in \mathbb{R}$.

□

הערה 2. כל התכונות הקודמות מתקיימות לאופרטורים נורמליים או צמודים לעצמם, בהתאמה.

2 שילוש אוניטרי

יהי $T : V \to V$ אופרטור במרחב מכפלה פנימית V. למדנו שאם הפולינום האופייני שלו מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים, קיים לו בסיס, שעבורו המטריצה המייצגת היא משולשת (עליונה). בעת, נרצה לבנות בסיס אורתונורמלי B של V כך ש-$A = [T]_B$ משולשת.
נזכור כי תנאי הכרחי לשילוש באופן כללי הוא שהפולינום האופייני מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים. נוכיח שתנאי זה מספיק לקיום בסיס אורתונורמלי כנ"ל.

משפט 3. *נניח ש-$p_T(x)$ מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים. אזי קיים בסיס אורתונורמלי B של V כך ש-$A=[T]_V$ משולשת.*

הוכחה. קודם כל, לפי משפט השילוש, קיים בסיס B' של V כך ש-$A'=[T]_{B'}$ מטריצה משולשת עליונה. בעת, נשתמש בתהליך גראם-שמידט; נעבור מ-B' לבסיס אורתונורמלי B. נסמן $A=[T]_B$.

נסמן ב-C את מטריצת המעבר מ-B' ל-B. כפי שנאמר קודם, C מטריצה משולשת עליונה, ולכן C^{-1} אף היא משולשת עליונה, ולכן $A=C^{-1}A'C$ גם היא מטריצה משולשת עליונה, כדרוש.

□

הערה 3. בביוון ההפוך המשפט מתקיים גם כן, כי פירוק של $p_T(x)$ למכפלה של גורמים לינאריים הוא תנאי הכרחי לשילוש.

משפט 4. *תהי A מטריצה ריבועית. נניח ש-$p_A(x)$ מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים. אזי קיימת מטריצה אוניטרית P כך ש-$P^{-1}AP$ מטריצה משולשת.*

לעיתים מנסחים את המשפט ש-P^*AP משולשת, אך זה אותו הדבר, כי עבור מטריצות אוניטריות $P^*=P^{-1}$.

הוכחה. נתבונן באופרטור $T=L_A:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^n$, המוגדר על ידי $T(v)=Av$, כאשר $v\in\mathbb{F}^n$. לכן, אם E הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^n$, $A=[T]_E$.

תהי $\langle\ ,\ \rangle$ המכפלה הפנימית הסטנדרטית ב-$\mathbb{F}^n$.

לפי המשפט הקודם, קיים בסיס אורתונורמלי B של $\mathbb{F}^n$ כך ש-$\tilde{A}=[T]_B$ משולשת.

נסמן ב-P את מטריצת המעבר מ-E ל-B. אזי $\tilde{A}=P^{-1}AP$ מטריצה משולשת, ו-P אוניטרית כמטריצת מעבר מבסיס אורתונורמלי E לבסיס אורתונורמלי B.

□

הערה 4. מעל $\mathbb{R}$ מדברים על שילוש אורתוגונלי; המטריצה P היא אורתוגנולית (ז"א $P^{-1}=P^t$).

הערה 5. מעל $\mathbb{C}$, כל אופרטור וכל מטריצה ניתנים לשילוש אוניטרי, כי התנאי על הפירוק של $p_T(x)$ מתקיים אוטומטית (מעל המרוכבים, לכל פולינום יש פירוק למכפלה של גורמים לינאריים).

הערה 6. אלגוריתם לחיפוש מפורש של מטריצה משלשת אוניטרית P

1. משלשים את המטריצה הנתונה בעזרת מטריצה משלשת Q.
2. משתמשים בתהליך גראם-שמידט על Q, בעזרת מטריצה C.
3. מקבלים $P=CQ$.