1 סוגים מיוחדים של אופרטורים

הגדרה 1. יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{F}$, ויהי $T : V \to V$ אופרטור לינארי. אומרים ש-T:

1. **נורמלי**, אם $TT^* = T^*T$ (כלומר, T ו-T^* מתחלפים).
2. **אוניטרי**, אם $TT^* = I$ (אם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ - אומרים ש-T **אורתוגונלי**).
3. **צמוד לעצמו**, אם $T^* = T$ (אם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ - אומרים ש-T **סימטרי**).

הערה 1. כל אופרטור אוניטרי הוא נורמלי, וגם כל אופרטור צמוד לעצמו הוא נורמלי.

השם "אוניטרי" (ו"אורתוגונלי" מוכר לנו (גם "סימטרי") מתורת המטריצות, ולא סתם; אכן יש קשר בין המושגים. המשפט הבא יבטא את הקשר הזה.

משפט 1. *אם $T : V \to V$ אופרטור מאחד הסוגים הנ"ל (נורמלי, אוניטרי או צמוד לעצמו), ואם B בסיס אורתונורמלי של V, אזי המטריצה המייצגת $A = [T]_B$ מקיימת את התכונה המתאימה, ז"א:*

1. *$AA^* = A^*A$ (A נקראת **נורמלית**).*
2. *$AA^* = I$ (A נקראת **אוניטרית**).*
3. *$A = A^*$ (A נקראת **צמודה לעצמה**).*

בכיוון ההפוך, אם A מטריצה המקיימת את אחת מהתכונות הנ"ל, אזי האופרטור הלינארי $T = L_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ המוגדר על ידי הנוסחה $L_A(v) = Av$ מקיים את התכונה המתאימה.

הוכחה. המטריצה המייצגת של T^* יחסית לבסיס אורתונורמלי B היא $A^* = \overline{A}^t$, ומזה נובע הכל.

□

2 הזהויות הפולריות

ננסה בעת לקחת נורמה על מרחב כלשהו V (מעל הממשיים או מעל המרוכבים, כמובן), ולשחזר ממנו את המכפלה הפנימית.

יהיו $u, v \in V$. נתבונן בנורמה $\|u + v\|$:

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle =$$

$$= \|u\|^2 + \overline{\langle u,v\rangle} + \langle u,v\rangle + \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(\langle u,v\rangle\right)$$

זהות פולרית ממשית

אם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, אזי לכל $u, v \in V$ מתקיים $\langle u,v\rangle = \frac{1}{2}\left(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right)$.

בעת נוכל להניח $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, ונמשיך. נוכיח למה קצרה, שתעזור להקל את החישובים.

למה 2.

$$\mathrm{Im}\left(\langle u,v\rangle\right) = \mathrm{Re}\left(\langle u, iv\rangle\right)$$

הוכחה. על פי חצי-לינאריות, $\langle u,iv\rangle=\bar{i}\langle u,v\rangle=-i\langle u,v\rangle$.
אם $\langle u,v\rangle=x+iy$, אזי $\mathrm{Im}\left(\langle u,v\rangle\right)=y$. מתקיים $\langle u,iv\rangle=-i\left(x+iy\right)=y-ix$, ולכן גם $\mathrm{Re}\left(\langle u,iv\rangle\right)=y$.

$\square$

נשים לב כי $\|iv\|^2=\langle iv,iv\rangle=i\bar{i}\langle v,v\rangle=\|v\|^2$, ולכן, על פי הזהויות שהוכחנו קודם,

$$\mathrm{Im}\left(\langle u,v\rangle\right)=\frac{1}{2}\left(\|u+iv\|^2-\|u\|^2-\|v\|^2\right)$$

זהות פולרית מרוכבת
אם $\mathbb{F}=\mathbb{C}$, אזי לכל $u,v\in V$ מתקיים

$$\langle u,v\rangle=\frac{1}{2}\left(\|u+v\|^2-\|u\|^2-\|v\|^2\right)+\frac{i}{2}\left(\|u+iv\|^2-\|u\|^2-\|v\|^2\right)$$

מכפלה פנימית ניתנת לשחזור החל מנורמה.

3 חזרה לאופרטורים המיוחדים

ננסה בעת למצוא קריטריונים לנורמליות ולאוניטריות של אופרטור.

משפט 3. *קריטריון לנורמליות*
אופרטור $T:V\to V$ הוא נורמלי אם ורק אם לכל $v\in V$ מתקיים $\|T\left(v\right)\|=\|T^*\left(v\right)\|$.

הוכחה. $\boxed{\Leftarrow}$ נניח ש-T נורמלי, אזי $TT^*=T^*T$.

$$\|T\left(v\right)\|^2=\langle T\left(v\right),T\left(v\right)\rangle=\langle v,T^*T\left(v\right)\rangle$$

$$\|T^*\left(v\right)\|^2=\langle T^*\left(v\right),T^*\left(v\right)\rangle=\left\langle v,\left(T^*\right)^*T^*\left(v\right)\right\rangle=\langle v,TT^*\left(v\right)\rangle$$

נקבל שוויון $\|T\left(v\right)\|^2=\|T^*\left(v\right)\|^2$, ולכן $\|T\left(v\right)\|=\|T^*\left(v\right)\|$.

$\boxed{\Rightarrow}$ נניח שלכל $v\in V$, $\|T\left(v\right)\|=\|T^*\left(v\right)\|$.
נוכיח קודם שלכל $u,v\in V$, מתקיים $\langle T\left(u\right),T\left(v\right)\rangle=\langle T^*\left(u\right),T^*\left(v\right)\rangle$. ניעזר בזהות הפולרית:

$$\langle T\left(u\right),T\left(v\right)\rangle=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\|T\left(u\right)+T\left(v\right)\|^2-\|T\left(u\right)\|^2-\|T\left(v\right)\|^2\right)+\frac{i}{2}\left(\|T\left(u\right)+iT\left(v\right)\|^2-\|T\left(u\right)\|^2-\|T\left(v\right)\|^2\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\|T\left(u+v\right)\|^2-\|T\left(u\right)\|^2-\|T\left(v\right)\|^2\right)+\frac{i}{2}\left(\|T\left(u+iv\right)\|^2-\|T\left(u\right)\|^2-\|T\left(v\right)\|^2\right)$$

לפי אותם החישובים ל-T^*,

$$\langle T^*\left(u\right),T^*\left(v\right)\rangle=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\|T^*\left(u+v\right)\|^2-\|T^*\left(u\right)\|^2-\|T^*\left(v\right)\|^2\right)+\frac{i}{2}\left(\|T^*\left(u+iv\right)\|^2-\|T^*\left(u\right)\|^2-\|T^*\left(v\right)\|^2\right)$$

נקבל שלכל $u,v\in V$, מתקיים $\langle T^{*}(u),T^{*}(v)\rangle=\langle T(u),T(v)\rangle$. מצד שני, על פי הגדרת ההעתקה הצמודה, מתקיים

$$\langle T(u),T(v)\rangle=\langle u,T^{*}T(v)\rangle$$

$$\langle T^{*}(u),T^{*}(v)\rangle=\langle u,TT^{*}(v)\rangle$$

לכן $\langle u,T^{*}T(v)\rangle=\langle u,TT^{*}(v)\rangle$ לכל $u,v\in V$.

כלומר, לכל $u,v\in V$ מתקיים $\langle u,T^{*}T(v)-TT^{*}(v)\rangle=0$.

נבחר $u=T^{*}T(v)-TT^{*}(v)$. לפי האי-שליליות, נקבל $T^{*}T(v)-TT^{*}(v)=0$ לכל $v\in V$, כלומר $T^{*}T-TT^{*}=0$ אופרטור האפס, לכן $T^{*}T=TT^{*}$, כלומר T נורמלי.

□

משפט 4. *קריטריונים לאוניטריות*
התכונות הבאות של אופרטור T שקולות:

1. *T אוניטרי.*
2. *T שומר מכפלה פנימית, כלומר לכל $u,v\in V$ מתקיים $\langle T(u),T(v)\rangle=\langle u,v\rangle$.*
3. *T שומר נורמה, כלומר לכל $v\in V$ מתקיים $\|T(v)\|=\|v\|$.*
4. *T שומר מרחקים, כלומר לכל $u,v\in V$ מתקיים $\rho(T(u),T(v))=\rho(u,v)$.*

הוכחה. $\boxed{1\Rightarrow 2}$ נניח $T^{*}T=TT^{*}=I$, ונחשב לכל $u,v\in V$:

$$\langle T(u),T(v)\rangle=\langle u,T^{*}T(v)\rangle=\langle u,I(v)\rangle=\langle u,v\rangle$$

$\boxed{2\Rightarrow 1}$ נניח שלכל $u,v\in V$ מתקיים $\langle u,T^{*}T(v)\rangle=\langle T(u),T(v)\rangle=\langle u,v\rangle$, כלומר $\langle u,T^{*}T(v)-v\rangle=0$. נבחר $u=T^{*}T(v)-v$, ונקבל שלכל $v\in V$, מתקיים $T^{*}T(v)-v=0$, ז"א $T^{*}T=I$, ולכן T אוניטרי.

$\boxed{3\Rightarrow 4}$ נניח $\|T(v)\|=\|v\|$ לכל $v\in V$. אזי לכל $u,v\in V$:

$$\rho(T(u),T(v))=\|T(u)-T(v)\|=\|T(u-v)\|=\|u-v\|=\rho(u,v)$$

$\boxed{4\Rightarrow 3}$ נניח שלכל $u,v\in V$ מתקיים $\rho(T(u),T(v))=\rho(u,v)$. אזי לכל $v\in V$:

$$\|T(v)\|=\rho(T(v),0)=\rho(v,0)=\|v\|$$

$\boxed{2\Rightarrow 3}$ נניח $\langle T(u),T(v)\rangle=\langle u,v\rangle$ לכל $u,v\in V$, וניקח $u=v$. נקבל שלכל $v\in V$,

$$\|T(v)\|^{2}=\langle T(v),T(v)\rangle=\langle v,v\rangle=\|v\|^{2}\Rightarrow\|T(v)\|=\|v\|$$

$\boxed{2 \Leftarrow 3}$ נניח $\|T(v)\| = \|v\|$ לכל $v \in V$. נתבונן ב-$\langle T(u), T(v)\rangle$:

$$\langle T(u), T(v)\rangle =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\|T(u)+T(v)\|^2 - \|T(u)\|^2 - \|T(v)\|^2\right) + \frac{i}{2}\left(\|T(u)+iT(v)\|^2 - \|T(u)\|^2 - \|T(v)\|^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\|T(u+v)\|^2 - \|T(u)\|^2 - \|T(v)\|^2\right) + \frac{i}{2}\left(\|T(u+iv)\|^2 - \|T(u)\|^2 - \|T(v)\|^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right) + \frac{i}{2}\left(\|u+iv\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right) = \langle u, v\rangle$$

□

הערה 2. תזכורת – זווית בין וקטורים

נזכיר כי עבור $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, אם $0 \neq u, v \in V$, אזי הזווית φ בין הווקטורים u, v היא המספר היחיד באינטרוול $[0, \pi]$ המקיים $\cos\varphi = \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\|v\|}$.

נראה בעת מה הקשר בין אופרטורים נורמליים ואוניטריים לזוויות.

משפט 5. *אם T נורמלי, ואם $u, v \in V$ שונים מאפס, אזי הזווית בין $T(u), T(v)$ שווה לזווית בין $T^*(u), T^*(v)$.*

הוכחה. נשים לב כי אם T נורמלי, אזי $\langle T(u), T(v)\rangle = \langle u, T^*T(v)\rangle = \langle u, TT^*(v)\rangle = \langle T^*(u), T^*(v)\rangle$, ולכן גם $\|T(u)\| = \|T^*(u)\|$ ו-$\|T(v)\| = \|T^*(v)\|$. אם כן,

$$\cos\sphericalangle(T(u), T(v)) = \frac{\langle T(u), T(v)\rangle}{\|T(u)\|\,\|T(v)\|}$$

$$\cos\sphericalangle(T^*(u), T^*(v)) = \frac{\langle T^*(u), T^*(v)\rangle}{\|T^*(u)\|\,\|T^*(v)\|}$$

ולכן הזוויות שוות.

□

הערה 3. כל אופרטור אוניטרי T שומר זוויות, כלומר $\sphericalangle(T(u), T(v)) = \sphericalangle(u, v)$.

הוכחה.

$$\cos\sphericalangle(T(u), T(v)) = \frac{\langle T(u), T(v)\rangle}{\|T(u)\|\,\|T(v)\|} = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\,\|v\|} = \cos\sphericalangle(u, v)$$

□

נשאלת השאלה – לאחר המשפט הקודם, שבו הראינו שקילויות רבות לאופרטור אוניטרי, האם גם כאן אין שקילות? התשובה היא שאין. ניתן דוגמה.

דוגמה 1. ניקח $T(v) = 2v$. הוא שומר זוויות, אבל איננו אוניטרי; $TT^*(v) = 4v$.