1 משפט ז'ורדן - המשך

1.1 משפט ז'ורדן הנילפוטנטי - המשך

הוכחנו שצורת ז'ורדן של אופרטור נילפוטנטי קיימת. בעת, נוכיח כי היא יחידה (עד כדי שינוי סדר הבלוקים). ניעזר לכך בלמה הבאה:

למה 1. *יהי* $E = \left\{T^{m-1}(v), \ldots, T(v), v\right\}$ *מסלול מאורך* m*, יהי* $V_0 = \mathrm{span}(E)$*, ויהי* $T = T|_{V_0}$*. אזי*

$$\dim\left(\ker T_0 \cap \mathrm{im}\, T_0^j\right) = \begin{cases} 1, & j < m \\ 0, & j \geq m \end{cases}$$

הוכחה. נניח $j \geq m$.

$$T^m(v) = 0 \Rightarrow T^j(v) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow T^j[E] = \{0\} \Rightarrow \mathrm{im}\, T_0^j = \{0\} \Rightarrow \dim\left(\ker T_0 \cap \mathrm{im}\, T_0^j\right) = 0$$

נניח $j < m$.

נתבונן בווקטורים $T(v), \ldots, T^{m-1}(v)$. לכן, $\dim(\mathrm{im}\, T_0) \geq m-1$.

לכן, $\dim(\ker T_0) + (m-1) \leq \dim(\ker T_0) + \dim(\mathrm{im}\, T_0) = \dim V_0 = m$,

כלומר $\dim(\ker T_0) \leq 1$, ומכאן $\dim\left(\ker T_0 \cap \mathrm{im}\, T_0^j\right) \leq 1$.

נתבונן בווקטור $T^{m-1}(v) \neq 0$ (לפי הגדרת המסלול). מצד שני, $T^{m-1}(v) = T^j\left(T^{m-j-1}(v)\right) \mathrm{im}\, T_0^j$, ובנוסף $T\left(T^{m-1}(v)\right) = T^m(v) = 0$, כלומר $T^{m-1}(v) \in \ker T$, בדרוש.

$\square$

הגיע הזמן לעבור להוכחת היחידות של צורת ז'ורדן.

משפט 2 (משפט ז'ורדן הנילפוטנטי - יחידות)**.** *יהי* $T : V \to V$ *אופרטור נילפוטנטי מסדר* k*, ויהי* B *בסיס מז'רדן ל-*T*. אזי מספר המסלולים מכל אורך ב-*B *מוגדר באופן יחיד על ידי* T *(ולכן, מספר הבלוקים מכל גודל ב-*$[T]_B$ *מוגדר ביחידות).*

הוכחה. נוכיח כי:

1. המסלול הארוך ביותר ב-B הוא מסדר k.
2. לכל $j = 1, \ldots, k$, מספר המסלולים מאורך הגדול מ-j שווה ל-$\dim\left(\ker T \cap \mathrm{im}\, T_0^j\right)$.
3. לכן, מספר המסלולים מאורך j בדיוק שווה ל:

$$\dim\left(\ker T \cap \mathrm{im}\, T^{j-1}\right) - \dim\left(\ker T \cap \mathrm{im}\, T^j\right)$$

1. אם כל המסלולים ב-B הם מאורך קטן מ-k, אזי $T^{k-1} = 0$, ולכן סדר הנילפוטנטיות של T הוא $k-1$, בסתירה להנחה.

אם קיים מסלול מאורך גדול מ-k, אז יחד עם $T^k = 0$ נקבל כי 0 שייך למסלול, בסתירה להגדרת המסלול.

2. נסמן $E_1, \ldots, E_r$ המסלולים ב-B. נסמן לכל $i = 1, \ldots, r$, $V_i = \operatorname{span}(E_i)$.
נתבונן בסכום הישר של תתי-מרחבים אינווריאנטיים

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$$

נסמן לכל $i = 1, \ldots, r$, $T_i = T|_{V_i}$.
לכן, לפי למה קודמת,

$$\ker T = \ker T_1 \oplus \cdots \oplus \ker T_r$$

ובן

$$\operatorname{im} T = \operatorname{im} T_1 \oplus \cdots \oplus \operatorname{im} T_r$$

לכן, לפי הלמה על חיתוך סכום ישר, נקבל כי

$$\ker T \cap \operatorname{im} T^j = \left(\ker T_1 \cap \operatorname{im} T_1^j\right) \oplus \cdots \oplus \left(\ker T_r \cap \operatorname{im} T_r^j\right)$$

לפי הלמה הקודמת, לכל $s = 1, \ldots, r$, $\dim\left(\ker T_s \cap \operatorname{im} T_s^j\right) = \begin{cases} 1, & j < \ell \\ 0, & j \geq \ell \end{cases}$,
באשר ℓ הוא אורך המסלול.

אם כן, מספר המסלולים מאורך הגדול מ-j הוא $\dim\left(\ker T \cap \operatorname{im} T^j\right)$, שזה הסכום על אורך כל המסלולים שסדרם גדול מ-j, בדרוש.

3. מסקנה ישירה משני הסעיפים הקודמים.

$\square$

2.1 משפט ז'ורדן לאופרטור עם ערך עצמי יחיד

הוכחנו את משפט ז'ורדן עבור אופרטור לינארי נילפוטנטי. מהגרסה שהוכחנו, נוכל להסיק גרסה מוכללת יותר:

משפט 3 (משפט ז'ורדן לאופרטור עם ערך עצמי יחיד)**.** *יהי $T : V \to V$ אופרטור כך ש-λ הוא ערך עצמי יחיד שלו. אזי יש ל-T הצגה בצורה אלכסונית בלוקים, כך שכל בלוק הוא $J_m(\lambda)$. הצגה זו יחידה עד כדי הסדר של הבלוקים.*

הוכחה. נתבונן באופרטור $T - \lambda I$. הוא נילפוטנטי, כי לפי משפט קאלי-המילטון,

$$(T - \lambda I)^n = p_T(T) = 0$$

לפי משפט ז'ורדן הנילפוטנטי, ניתן להציג את $T - \lambda I$ בעזרת מטריצה אלכסונית בלוקים, כך שכל בלוק הוא מהצורה $J_m(0)$. במילים אחרות, קיים בסיס B של V כך שמתקיים:

$$[T]_B - \lambda I_n = [T - \lambda I]_B = \begin{pmatrix} J_{m_1}(0) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{m_k}(0) \end{pmatrix}$$

ונקבל

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \boxed{J_{m_1}(\lambda)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{J_{m_k}(\lambda)} \end{pmatrix}$$

היחידות היא מסקנה מיידית מהיחידות במקרה הנילפוטנטי.

□

3.1 משפט ז'ורדן הכללי

הגיע הזמן לשלב את כל המשפטים שהיו לנו עד כה למשפט האולטימטיבי - משפט ז'ורדן הכללי. במשפט זה נשתמש בפירוק של המרחב V לסכום ישר של המרחבים העצמיים המוכללים, ובכך נצמצם את האופרטור לאופרטורים בעלי ערך עצמי יחיד. הוכחנו עבורם את המשפט, וזה יוכיח את משפט ז'ורדן הכללי. עבור היחידות תידרש מעט עבודה, אבל גם היא תגיע.

משפט 4 (משפט ז'ורדן הכללי). *יהי $T: V \to V$ אופרטור לינארי כך ש-$p_T(x)$ מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים. אזי T ניתן להצגה אלכסונית בלוקים, כך שכל בלוק הוא מהצורה $J_{m_i}(\lambda_i)$. הצגה זו יחידה עד כדי סדר הבלוקים.*

הוכחה. **קיום** נסמן $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ הערכים העצמיים השונים של T. נתבונן בפירוק של V לסכום ישר של תתי-מרחבים עצמיים מוכללים: $V = K_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus K_{\lambda_s}$. הוא קיים בגלל ההנחה על הפולינום האופייני.

נתבונן, לכל $i = 1, \ldots, s$, בצמצום $T_i = T|_{K_{\lambda_i}}$. לכל T_i יש ערך עצמי יחיד λ_i, ולכן, לפי המשפט הקודם, T ניתן להצגה בצורה אלכסונית בלוקים, כך שכל בלוק הוא מהצורה $J_m(\lambda_i)$.

נתבונן באיחוד הזר $B = B_1 \cup \cdots \cup B_s$. בבסיס זה, נקבל ל-$T$ את הצורה הנדרשת.

יחידות יהי B בסיס מז'רדן ל-T, ויהי λ ערך עצמי של T.

נסדר את האיברים של B, כך שכל הבלוקים מהצורה $J_m(\lambda)$ יופיעו בחלק השמאלי העליון. נקבל

$$[T]_B = \left(\begin{array}{c|c} A_\lambda & 0 \\ \hline 0 & A' \end{array}\right)$$

כאשר ב-A_λ יופיעו כל הבלוקים מהצורה $J_m(\lambda)$, וב-A' של שאר הערכים העצמיים.

הגודל של A_λ נקבע באופן יחיד על ידי T, כי גודלו הוא בדיוק הריבוי האלגברי של λ.

אם נסמן $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$, אזי $A_\lambda = [T]_{\{v_1,\ldots,v_k\}}$, כאשר $\mathrm{Span}\{v_1, \ldots, v_k\}$ אינווריאנטי. לאופרטור $T|_{\mathrm{Span}\{v_1,\ldots,v_k\}}$ יש ערך עצמי יחיד, והמטריצה המייצגת שלו היא A_λ. לכן, לפי משפט היחידות לאופרטור עם ערך עצמי יחיד, מספר הבלוקים ב-A_λ מוגדר באופן יחיד על ידי T, כדרוש.

□

הוכחנו (בהצלחה) את צורת ז'ורדן (ואפילו שרדנו לספר על זה ולאמלל את הדורות הבאים עם ההוכחה). בעת, בעקבות ההוכחה ובעקבות הידע שלנו, נוכל לכתוב מספר מסקנות לגבי צורת ז'ורדן:

הערה 1. לכל ערך עצמי λ של T מתקיים:

1. סכום סדרי הבלוקים המתאימים ל-λ הוא הריבוי האלגברי של λ.
2. מספר הבלוקים בצורה $J_n\left(\lambda\right)$ שווה לריבוי הגיאומטרי של λ.
3. ה-m הגדול ביותר כך ש-$J_m\left(\lambda\right)$ יופיע בצורת ז'ורדן הוא מעלת הגורם $\left(x-\lambda\right)$ ב-$m_T\left(x\right)$.

הערה 2. כל מטריצה A כך ש-$p_A\left(x\right)$ מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים דומה למטריצת ז'ורדן, וצורת הז'ורדן של A יחידה עד כדי סדר הבלוקים.