

1 מרחבים עצמיים מוכללים

הוכחנו כי אם נצליח לפרק את המרחב שלנו לתתי-מרחבים אינווריאנטיים, המטריצה המייצגת של אופרטור תהיה אלכסונית בלוקים. כעת נבנה את המרחבים האלו. במקרה של אופרטור לכסין, היו n וקטורים עצמיים, ואז הפירוק היה בדיוק לסכום הישר של המרחבים העצמיים. עם זאת, במטריצות שאינן לכסיונות (כמו בלוק ז'ורדן), אין מספיק וקטורים עצמיים, ולכן נכליל את ההגדרה ונגדיר:

הגדרה 1. יהי V מרחב וקטורי מעל \mathbb{F} מממד n , יהי $T : V \rightarrow V$ אופרטור לינארי, ויהי $\lambda \in \mathbb{F}$ ערך עצמי של T . נגדיר

$$K_\lambda = \ker [(T - \lambda I)^n]$$

K_λ נקרא **המרחב העצמי המוכלל** של T הקשור ל- λ .

נעבור להגדרה אחרת, נוכיח עליה למה פשוטה ואז נחזור למושג שהגדרנו.

הגדרה 2. יהי $T : V \rightarrow V$ אופרטור לינארי, ויהי $v \in V$, $v \neq 0$. קבוצה בת m איברים מהצורה $E = \{T^{m-1}(v), \dots, T(v), v\}$ נקראת **מסלול מאורך m** , אם $T^m(v) \neq 0$ אבל $T^m(v) = 0$.

למה 1. בסימונים הל"ל, E קבוצה בת"ל.

הוכחה. נניח ש- $\alpha_0 v + \alpha_1 T(v) + \dots + \alpha_{m-1} T^{m-1}(v) = 0$ (*). נפעיל T^{m-1} :

$$T^{m-1}(\alpha_0 v + \alpha_1 T(v) + \dots + \alpha_{m-1} T^{m-1}(v)) = T^{m-1}(0)$$

$$\underbrace{\alpha_0 T^{m-1}(v)}_{\neq 0} + \underbrace{\alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \dots + \alpha_{m-1} \cdot 0}_0 = 0$$

לכן $\alpha_0 = 0$. נציב ב-(*), ונקבל

$$(*) \quad \alpha_1 T(v) + \dots + \alpha_{m-1} T^{m-1}(v) = 0$$

הפעם נפעיל T^{m-2} , ועל ידי חישוב דומה נקבל $\alpha_1 = 0$. כך ממשיכים, ומקבלים

$$\alpha_0 = \dots = \alpha_{m-1} = 0$$

□

נחזור למרחב העצמי המוכלל.

למה 2. יהי V מרחב וקטורי מעל \mathbb{F} , יהי $T : V \rightarrow V$ אופרטור לינארי, ויהי $\lambda \in \mathbb{F}$ ערך עצמי של T .

$$1. K_\lambda = \{v \in V \mid \exists k \in \mathbb{N} : (T - \lambda I)^k v = 0\}$$

$$2. V_\lambda \subseteq K_\lambda$$

3. K_λ תת-מרחב אינווריאנטי תחת T , ולכן גם תחת כל אופרטור בצורה $p(T)$, כאשר $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ פולינום כלשהו.

הוכחה. 1. נסמן $K'_\lambda = \{v \in V \mid \exists k \in \mathbb{N} : (T - \lambda I)^k v = 0\}$, ונוכיח $K_\lambda = K'_\lambda$.

\subseteq טריוויאלי, אם ניקח $k = n$.

\supseteq יהי $v \in K'_\lambda$, אם $v = 0$, הוא נמצא בכל תת-מרחב, ולכן נניח $v \neq 0$. נבחר את ה- k הקטן ביותר שעבורו $(T - \lambda I)^k(v) = 0$, ונתבונן במסלול

$$E = \{(T - \lambda I)^{k-1}(v), \dots, (T - \lambda I)(v), v\}$$

(הוא מסלול, לפי הבחירה של k). E בת"ל, $\dim V = n$, ולכן $k \leq n$. אם כן,

$$(T - \lambda I)^n(v) = (T - \lambda I)^{n-k}(T - \lambda I)^k(v) = (T - \lambda I)^{n-k}(0) = 0$$

2. לפי הסעיף הקודם,

$$V_\lambda = \{v \in V \mid T(v) = \lambda v\} = \{v \in V \mid (T - \lambda I)(v) = 0\} \subseteq K_\lambda$$

3. קודם נוכיח ש- K_λ אינווריאנטי תחת T . נשתמש בעובדה הבאה: האופרטורים T ו- $T - \lambda I$ מתחלפים, כלומר $(T - \lambda I)T = T(T - \lambda I)$; לכן, גם כל חזקה של האחד מתחלפת עם חזקה של השני.

יהי $v \in K_\lambda$, ונוכיח $T(v) \in K_\lambda$.

$$(T - \lambda I)^n T(v) = T(T - \lambda I)^n(v) = T(0) = 0$$

עובדה כללית: אם $W \subseteq V$ תת-מרחב אינווריאנטי תחת T , ואם $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ פולינום כלשהו, אזי W אינווריאנטי גם תחת $p(T)$. נוכיח - יהי $v \in W$, ונסמן $p(T) = \alpha_0 I + \alpha_1 T + \dots + \alpha_s T^s$ אזי

$$(p(T))(v) = \underbrace{\alpha_0 I(v)}_{\in W} + \underbrace{\alpha_1 T(v)}_{\in W} + \dots + \underbrace{\alpha_s T^s(v)}_{\in W}$$

בדרוש.

□

למה 3. 1. יהיו $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ שני ערכים עצמיים שונים של T , ויהי $v \in K_\lambda$, $v \neq 0$. אזי

$$K_\lambda \ni (T - \lambda I)(v) \neq 0$$

2. יהיו $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ שני ערכים עצמיים שונים של T . אזי $K_\lambda \cap K_\mu = \{0\}$.

הוכחה. 1. K_λ אינווריאנטי. ניקח $p(T) = T - \mu I$, ונקבל כי $(T - \mu I)(v) \in K_\lambda$. נוכיח $(T - \mu I)(v) \neq 0$.

נניח בשלילה כי $(T - \mu I)(v) = 0$, לכן $T(v) = \mu v$. ניתן לבדוק כי אם ניקח פולינום $f(x) \in \mathbb{F}[x]$, אזי $f(T)(v) = f(\mu)v$. נבחר $f(x) = (x - \lambda)^n$. אם כן, נציב את T ונקבל $f(T) = (T - \lambda I)^n$. מכאן קיבלנו

$$\underbrace{(T - \lambda I)^n(v)}_{=0} = \underbrace{(\mu - \lambda)^n v}_{\neq 0}$$

בסתירה, בדרוש.

2. נניח שקיים $v \in K_\mu, v \in K_\lambda$ נוביח ש- $v = 0$.
 נניח בשלילה ש- $v \neq 0$, ונתבונן בווקטורים הבאים:

$$\underbrace{v}_{\in K_\lambda, \neq 0}, \underbrace{(T - \mu I)(v)}_{\in K_\lambda, \neq 0}, \underbrace{(T - \mu I)^2(v)}_{\in K_\lambda, \neq 0}, \dots, \underbrace{(T - \mu I)^n(v)}_{\in K_\lambda, \neq 0}$$

בסתירה להנחה שלפיה $v \in K_\mu$

□

הגדרנו את המרחב העצמי המוכלל כגרעין של האופרטור $(T - \lambda I)^n$. כעת הגיוני שנסתכל גם על התמונה של האופרטור, ונראה מה הקשר ביניהם.

הגדרה 3. יהי $T : V \rightarrow V$ אופרטור לינארי, $\dim V = n$, ויהי $\lambda \in \mathbb{F}$ ערך עצמי של T . נסמן

$$I_\lambda = \text{im}[(T - \lambda I)^n]$$

למה 4. 1. I_λ תת-מרחב אינווריאנטי תחת T .

2. $V = K_\lambda \oplus I_\lambda$.

תזכורת:

ניזכר במשפט הדרגה מלינארית 1 לצורך ההוכחה.

יהי $E : V \rightarrow V$ אופרטור לינארי, אזי $\dim(\ker E) + \dim(\text{im} E) = \dim V$.

הוכחה. 1. כפי שציינו בהוכחת אחת הלמות הקודמות, T מתחלף עם $T - \lambda I$ ועם כל חזקה שלו. לכן, אם $v \in I_\lambda$, כלומר קיים $x \in V$ שעבורו $(T - \lambda I)^n(x) = v$, אזי

$$T(v) = T((T - \lambda I)^n(x)) = (T - \lambda I)^n(T(x)) \in I_\lambda$$

2. נתחיל מלהוכיח ש- $K_\lambda \cap I_\lambda = \{0\}$, כלומר שהסכום ישר.

נניח ש- $v \in K_\lambda \cap I_\lambda$, אזי קיים $x \in V$ שעבורו $(T - \lambda I)^n(x) = v$, וכן $(T - \lambda I)^n(v) = 0$ נקבל

$$(T - \lambda I)^{2n}(x) = 0 \Leftrightarrow x \in K_\lambda$$

לכן, $(T - \lambda I)^n(x) = 0$, ולכן $v = 0$, ומכאן אכן $K_\lambda \cap I_\lambda = \{0\}$.

כעת נרצה להוכיח שהסכום (הישר) אכן מכסה את המרחב כולו. לצורך כך, נסתכל על המימדים. ניקח $E = (T - \lambda I)^n$, ולפי התזכורת (משפט הדרגה להעתקות לינאריות),

$$\dim V = \dim K_\lambda + \dim I_\lambda = \dim(K_\lambda \oplus I_\lambda)$$

מתקיים $K_\lambda \oplus I_\lambda \subseteq V$, וכן $\dim V = \dim(K_\lambda \oplus I_\lambda)$ לכן $V = K_\lambda \oplus I_\lambda$.

□

למה 5. אם $T : V \rightarrow V$ אופרטור נילפוטנטי, $n = \dim V$, אזי הפולינום האופייני של T הוא

$$p_T(x) = x^n$$

הוכחה. $T^s = 0$, ולכן x^s הוא פולינום מאפס ל- T . לכן, $m_T(x) | x^s$, וז"א $m_T(x) = x^k$. אבל $p_T(x) | [m_T(x)]^n$, ולכן $p_T(x) | x^{kn}$, ובנוסף $\deg(p_T) = n$. לכן, $p_T(x) = x^n$. \square

מסקנה 6. $\lambda = 0$ הוא ערך עצמי יחיד של כל אופרטור נילפוטנטי.

שימו לב שאת המסקנה האחרונה ניתן להוכיח גם ללא המשפט, והמשפט ינבע ממנה.