1 המשך סדרות

1.1 סדרות מונוטוניות

הגדרה 1. אומרים שסדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ "עולה מונוטונית" אם $\forall n : x_n \leq x_{n+1}$, במקרה כזה יש באלה שמסמנים $x_n \nearrow$.
באופן דומה "יורדת מונוטונית" תהיה סדרה בה $\forall n : x_n \geq x_{n+1}$ ובמקרה כזה יש באלה שמסמנים $x_n \searrow$

משפט 1. *תהי סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש- $\sup x_n = M, \inf x_n = m$. אם $x_n \nearrow$ אז הסדרה מתכנסת ל- M ואם $x_n \searrow$ אז הסדרה מתכנסת ל- m.*

הוכחה. נוכיח עבור סדרה מונוטונית עולה, ועבור מונוטונית יורדת ההוכחה אנלוגית. אם $M \in \mathbb{R}$ אז יהי $\epsilon > 0$ לפי תבונה של סופרימום, $\exists n_0 : x_{n_0} > M - \epsilon$ וכיוון שזו סדרה מונוטונית עולה,

$$\forall n > n_0 : M - \epsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq M < M + \epsilon$$

ואז $x_n \to M$.
אם $M = \infty$ אז יהי $E \in \mathbb{R}$. מההגדרה של חסם עליון אינסופי, $\exists n_0 : x_{n_0} > E$ וכיוון שזו סדרה מונוטונית עולה, $\forall n > n_0 : E < x_{n_0} \leq x_n$ ואז $x_n \to \infty = M$.
□

2.1 מעבר גבול

תהי הסדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ שאיבריה נראים ככה: $x_1, x_2, x_3, \cdots$ ונניח ש- $\lim_{n\to\infty} x_n = L$. נסתכל על הסדרה x_{n+1} שאיבריה הם $x_2, x_3, x_4, \cdots$, ונראה ש- $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = L$ גם כן. זאת משום שעבור $\epsilon > 0$ ידוע ש- $\exists_{n_0} \forall_{n>n_0} : |x_n - L| < \epsilon$ וכיוון שזה לכל $n > n_0$ אז במצב כזה גם $n+1$ (שהוא גדול מ- n שגדול מ- n_0) מקיים את הטענה ש- $|x_{n+1} - L| < \epsilon$.
העקרון הזה הוא ליבו של טריק נחמד שעוזר לחשב במקרים רבים גבולות של סדרות הנתונות בצורה רקורסיבית. השיטה היא כזאת: אם נתון ש- $x_{n+1} = f(x_n)$ אז גם $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$ אבל $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = L$ ובאגף ימין אפשר גם להשתמש באריתמטיקה של גבולות כדי להציב L במקומות המתאימים, וכך מגיעים למשוואה. צריך לשים לב שכל זה בא בהנחה שהסדרה x_n מתכנסת, ואת זה יש להוכיח!

דוגמה 1. מהו הגבול של הסדרה $x_1 = \sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}, \cdots, x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$?
פתרון: נניח שהסדרה מתכנסת, ולכן $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2+x}$. מכאן

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1}^2 = \lim_{n\to\infty} 2 + x_n$$

נציב $\lim_{n\to\infty} x_n = L$ ואז

$$L^2 = 2 + L$$

$$L^2 - L - 2 = (L-2)(L+1) = 0$$

$$L = -1, 2$$

מצאנו שבמקרה שהסדרה מתכנסת, יש רק מועמד אחד שיכול להיות הגבול (-1 נפסל משום שכל איברי הסדרה חיוביים ולכן לא יכולים להתכנס למספר שלילי). אם נצליח להוכיח שהסדרה מתכנסת, הגבול שלה הוא 2. נוכיח שהיא מונוטונית עולה וחסומה ע"י 2:

מונוטונית עולה -

$$x_n \leq x_{n+1} \Leftrightarrow x_n \leq \sqrt{x_n + 2} \Leftrightarrow x_n^2 \leq x_n + 2 \Leftrightarrow -1 \leq x_n \leq 2$$

כלומר הסדרה לא תרד כל עוד האיברים בין -1 ל-2. כל איברי הסדרה חיוביים ועכשיו נוכיח שכל איברי הסדרה לא גדולים מ-2 באמצעות אינדוקציה:

$$x_1 = \sqrt{2} < 2, x_n \leq 2 \Rightarrow x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2} \leq \sqrt{2+2} = 2$$

אז כל איברי הסדרה קטנים מ-2 ולכן הסדרה מונוטונית עולה וחסומה ומכאן שמתכנסת ל-2. (את הגבול חישבנו באמצעות מעבר הגבול)

3.1 סכום של סדרה הנדסית

הגדרה 2. סדרה a_n נקראת סדרה הנדסית אם $\exists q \forall n : a_{n+1} = q \cdot a_n$.

נסמן את הסדרה

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1} = a_1(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1})$$

ונשים לב ש- $x_n(1-q) = a_1(1-q^n) \Rightarrow x_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$. מה הגבול של הסדרה הזאת?

אם $|q| > 1$ אז $\lim_{n\to\infty} |\frac{q^n-1}{q-1}| = \infty$

אם $|q| < 1$ אז $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ ואז לפי אריתמטיקה של גבולות, $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{a_1(0-1)}{q-1} = \frac{a_1}{1-q}$

אם $q = 1$ אז נשים לב ש- $a_n = a_1$ ולכן $x_n = n \cdot a_1$ ולכן חוץ מבמקרה המנוון בו האיבר הראשון הוא 0, הסדרה לא תתכנס.

אם $q = -1$ אז x_n תראה ככה: $a_1, 0, a_1, 0, \cdots$, ושוב זה לא מתכנס חוץ מבמקרה בו $a_1 = 0$

4.1 אי שיוויון ברנולי

משפט 2.

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall x > -1 : (1+x)^n \geq 1 + nx$$

הוכחה. באינדוקציה: עבור $n = 1$ נקבל ש- $1+x \geq 1+x$ שזה כמובן נכון. נניח שהטענה נכונה עבור n כללי ונראה שעבור $n+1$ מתקיים

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1 + nx + x + nx^2 =$$

$$1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$$

□

2 המספר של אוילר e

1.2 הגדרה

נגדיר את $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$.

משפט 3. *קיים הגבול* $\lim_{n\to\infty} x_n$ *, לגבול הזה קוראים* e.

הוכחה. נוכיח שהסדרה מונוטונית עולה וחסומה מלעיל.
עולה מונוטונית:

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}} = \frac{(\frac{n+1}{n})^n}{(\frac{n}{n-1})^{n-1}} = \frac{(n+1)^n(n-1)^{n-1}}{n^n n^{n-1}} =$$

$$\frac{(n^2-1)^n n}{n^{2n}(n-1)} = (1-\frac{1}{n^2})^n \frac{n}{n-1}$$

לפי אי שיוויון ברנולי, זה גדול או שווה לביטוי הבא:

$$(1+n(-\frac{1}{n^2}))\cdot\frac{n}{n-1} = \frac{(n-1)n}{n(n-1)} = 1$$

מכאן שזוהי סדרה מונוטונית עולה.
<u>חסומה מלעיל:</u>
$x_n = (1+\frac{1}{n})^n$
ואם נפתח את הביטוי לפי הבינום של ניוטון נקבל

$$x_n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{1}{n^n}$$

איבר טיפוסי בסכום הזה הוא מהצורה

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}\frac{1}{n^k} \le \frac{n^n}{n^{n-k}k!}\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}$$

ולכן

$$x_n \le 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \le 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

כל מה שאחרי ה־2 זה סדרה הנדסית אינסופית שסכומה 1 ולכן נקבל ש־ $x_n \le 3$
אז זוהי סדרה מונוטונית עולה וחסומה מלעיל ולכן מתכנסת.

□

2.2 תבונות של e

משפט 4. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} = e$

הוכחה. נגדיר $e_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$. צריך להראות ש־ $e_n \to e$. אם נשתמש באותה סדרה x_n שהגדרנו אז ראינו בהוכחה של המשפט הקודם ש־ $x_n \le e_n$. מצד שני אם נכתוב את x_n בצורה מפורשת אפשר גם לראות ש־

$$x_n = 1 + 1 + \cdots + \frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}{n!}$$

ולכן אם נקבע k ספציפי וניקח $n > k$ נקבל ש-

$$x_n \geq 1 + 1 + \cdots + \frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{k!}$$

ואם נשאיף את $n \to \infty$ אז נקבל בצד ימין בדיוק את e_k ובצד שמאל את e. גבול שומר על אי שיוויון חלש ולכן נקבל

$$x_n \leq e_n \leq e$$

ולפי משפט הסנדוויץ' נקבל את הדרוש.

□

נשים לב שאם נגדיר $e_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ אז אם $N > n$ מתקיים

$$e_N - e_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots \frac{1}{N!} \leq \frac{1}{(n+1)!} + \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+2)^{N-n-1}}\right) =$$

$$\frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{\frac{1}{n+2}\left(\left(\frac{1}{n+2}\right)^{N-n} - 1\right)}{\frac{1}{n+2} - 1} \leq \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} = \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{n+1}$$

כעת נשתמש בזה בשביל להוכיח:

משפט 5. $e \notin \mathbb{Q}$

הוכחה. נניח $e = \frac{p}{q} = 1 + \cdots + \frac{1}{n!} + \alpha_n$ ומכאן $|\alpha_n| < \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{n+1}$ וע"י כפל של 2 האגפים נקבל

$$(n+1)!\frac{p}{q} = (n+1)!(1 + \cdots + \frac{1}{n!}) + (n+1)!\alpha_n$$

וזה נכון לכל n, בפרט ל- $n > q$. במקרה זה, אגף שמאל שלם ואגף ימין מורכב ממשהו שהוא שלם ועוד $(n+1)!\alpha_n$ אבל החלק האחרון הזה הוא לא שלם משום שקטן מ- $\frac{1}{n+1}$.
אגף שמאל, שהוא שלם הוא סכום של משהו שלם ומשהו שהוא לא שלם. סתירה □

3 גבולות חלקיים

3.1 גבול עליון ותחתון

תהי סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. נגדיר 2 סדרות חדשות: $L_n = \sup\{x_k : k \geq n\}, l_n = \inf\{x_k : k \geq n\}$. ברור ש- $l_n \leq L_n$.

תזכורת: $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow \inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$

מהתזכורת הזאת נשים לב ש- L_n מונו' (מונוטונית) יורדת ו- L_n מונו' עולה. זאת משום ש- $\{x_k : k \geq n+1\} \subseteq \{x_k : k \geq n\}$ ולכן $l_n \leq l_{n+1} \leq L_{n+1} \leq L_n$

הגדרה 3. הגבול העליון של x_n, שמסומן באופן הבא: $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ מוגדר להיות $\lim_{n\to\infty} L_n$. באותו אופן, הגבול התחתון הוא $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} l_n$.

משפט 6. *תהי סדרה חסומה x_n אזי*
הגבול העליון והתחתון זהים אם ורק אם הסדרה x_n מתכנסת (ואז תתכנס לגבול העליון/תחתון)

הוכחה. $\boxed{\Leftarrow}$ נראה ש- $l_n \leq x_n \leq L_n$ אבל הקצוות מתכנסים לאותו מספר L ולכן, ממשפט הסנדוויץ', $x_n \to L$.

$\boxed{\Rightarrow}$ יהי $\varepsilon > 0$. אנו יודעים ש- $\exists N \forall n > N : x_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ ואז לפי ההגדרה $\forall n > N : L - \varepsilon < x_n < L + \varepsilon$. לכן גם

$$\forall n > N : L - \varepsilon \leq l_n \leq L_n \leq L + \varepsilon$$

ובעצם קיבלנו ש- $\exists N \forall n > N : |L_n - L|, |l_n - L| < \varepsilon$ ☐

2.3 תתי סדרות

הגדרה 4. תהי $A \subseteq \mathbb{N}$ אינסופית אז הצמצום של הסדרה $x_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ אל הקבוצה A נקראת תת סדרה של x_n. עוד דרך להסתכל על זה היא לקחת סדרה חד חד ערכית של טבעיים שמונוטונית עולה, n_k (לדוגמה $n(k) = 2k$ היא סדרת הזוגיים $(2, 4, 6, \cdots$ ואז להסתכל על $f(n(k))$ או x_{n_k} .

דוגמה 2. נסתכל על הסדרה $1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \cdots$ נסתכל על הסדרה שנמצאת במקומות הזוגיים, כלומר ניקח את $A = \mathbb{N}_{\text{even}}$ ואז $n(k) = 2k$ ו- x_{n_k} נראית כבה: $0, 0, 0, 0, \cdots$. הסדרה המקורי לא מתכנסת, אבל תת הסדרה הזאת כן מתכנסת, ל-0. זה הרעיון של גבול חלקי.

3.3 גבולות חלקיים

הגדרה 5. $l \in \mathbb{R}$ נקרא גבול חלקי של סדרה אם קיימת תת סדרה שלה שמתכנסת ל- l

משפט 7. *אם $x_n \to L$ אז כל תת סדרה שלה מתכנסת ל-L.*

הוכחה. תהי תת סדרה x_{n_k} ויהי אפסילון גדול מ-0. עפ"י הנתון $\exists n_0 \forall n > n_0 |x_n - L| < \epsilon$. ידוע ש- n_k סדרה חח"ע מונוטונית עולה של טבעיים, ולכן היא לא חסומה וקיים k_0 כך ש- $\forall k > k_0 : n_{k_0} > n_0$. מכאן ש- $\forall k > k_0 : |x_{n_k} - L| < \varepsilon$ ☐

משפט 8. *תהי סדרה שכל תת סדרה שלה מתכנסת ל- L, אזי $x_n \to L$.*

הוכחה. נניח בשלילה שהסדרה לא מתכנסת ל- L, אזי $\exists_{\epsilon>0} \forall_N \exists_{n>N} : |x_n - L| \geq \epsilon$. אם כך, נבנה תת סדרה x_{n_k} באופן הבא: לכל N קיים $n > N$ שעבורו $|x_n - L| \geq \epsilon$ ולכן ניקח את אותם nים עבור $N = 1, 2, 3, \cdots$ ואלה יהיו ה- n_k. באופן הזה נקבל תת סדרה שהמרחק בין איבר בה ל-L גדול או שווה לאפסילון אבל זה סותר את הנתון שכל תתי הסדרות שואפות ל- L. ☐

4.3 קשר בין גבולות חלקיים לגבול עליון ותחתון

משפט 9. *כל גבול חלקי של סדרה הוא בין הגבול התחתון שלה לגבול העליון שלה.*

הוכחה. יהי l גבול חלקי אז קיימת תת סדרה $x_{n_k} \to l$. מתקיים ש- $l_{n_k} \leq x_{n_k} \leq L_{n_k}$ וממשפט הסנדוויץ' נקבל את הדרוש. ☐

משפט 10. *הגבול העליון והתחתון הם גבולות חלקיים*

הוכחה. $L_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, \cdots\}$ ואז לכל k מתקיים $\exists_{n_k} : L_k - \frac{1}{k} < x_{n_k} < L_k$ ואז קיימת תת סדרה מונוטונית שלפי משפט הסנדוויץ' מתכנסת לגבול העליון. עבור הגבול התחתון באופן אנלוגי. ☐

5.3 משפט בולצאנו ווירשטראס

משפט 11. *לכל סדרה חסומה יש תת סדרה מתכנסת*

הוכחה. רעיון ההוכחה: הגבול התחתון הוא גבול של סדרה מונוטונית עולה (סדרת האינפימומים), והסדרה המקורית x_n חסומה מלעיל. לכן, גם סדרת האינפימומים חסומה מלעיל, ואז הגבול החלקי הוא מספר סופי משום שהוא גבול של סדרה מונוטונית וחסומה. משום שהגבול התחתון הוא גבול חלקי, קיימת תת סדרה שמתכנסת אליו. משל. בצורה יותר פורמלית: $-M \leq x_n \leq M \Rightarrow -M \leq l_n \leq M$ ואז l_n מונו' עולה וחסומה ומכאן שמתכנסת, אז הגבול התחתון קיים, והוא גבול חלקי, ולכן יש תת סדרה מתכנסת. □