1 המשך סדרות

1.1 סדרות חסומות

הגדרה 1. סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ נקראת חסומה אם קבוצת איברי הסדרה חסומה (ראינו את ההגדרה של קבוצה חסומה).

דוגמה 1. הסדרה הזאת לא חסומה:

$$0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, 5, 0, 6, 0, 7, \cdots$$

משום שלא חסומה מלעיל.

משפט 1. *כל סדרה מתכנסת היא חסומה*

הוכחה. נניח שהסדרה מתכנסת ל- L, ולכן לכל אפסילון קיים N בך ש- $\forall n > N : |a_n - L| < \varepsilon$. בפרט, עבור $\varepsilon = 1$. נגדיר

$$M = \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_N|, |L+1|\}$$

ונראה ש- $\forall n : |a_n| \leq M$ משום שאם $n \leq N$ אז האיבר $|a_n|$ נמצא בקבוצה ש-M הוא המקסימום שלה, ואם $n > N$ אז גם ככה $|a_n - L| < 1$ ולכן $|a_n| < |L| + 1 \leq M$. □

דוגמה 2. הסדרות $a_n = n$ ו- $b_n = (-1)^n \cdot n$ לא חסומות, ומכאן שהן לא מתכנסות.

הערה 1. המשפט ההפוך לא נכון. לדוגמה הסדרה $a_n = (-1)^n$ חסומה מלעיל ע"י 1 ומלרע ע"י -1 אבל לא מתכנסת

2.1 אריתמטיקה של גבולות

יהיו $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרות.

משפט 2. *אם* $\exists M : |b_n| < M$ *,* $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *אז* $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$ *(מכפלה של סדרה חסומה בסדרה ששואפת ל-0 זו סדרה ששואפת ל-0)*

הוכחה. יהי $\epsilon > 0$. ביוון ש- a_n שואפת ל-0, לכל מרחק שיתנו לי קיים N בך שלכל $n > N$, מרחק איברי a_n מ-0 קטן מהמרחק ההתחלתי שנתנו לי, בפרט עבור המרחק $\frac{\varepsilon}{M}$. מתקיים אז ש-

$$\exists N \forall n > N : |a_n| < \frac{\varepsilon}{M} \Rightarrow \exists N \forall n > N : |a_n| \cdot M < \epsilon$$

אבל המרחק של $a_n b_n$ מ-0 הוא

$$|a_n b_n - 0| = |a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leq |a_n| \cdot M$$

וראינו בשורה הקודמת שקיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים ש- $|a_n| \cdot M \leq \varepsilon$ ולכן אם ניקח את אותו N, לכל $n > N$ יתקיים ש- $|a_n b_n| < \varepsilon$, ומכאן, לפי הגדרת הגבול, $a_n b_n$ שואפת ל-0. □

דוגמה 3. $a_n = \frac{\sin(n!)}{n}$ היא סדרה שנראית די מסובבת במבט ראשון, אבל היא מתכנסת ל-0. זאת משום שהיא מכפלה של סדרה חסומה, $\sin(n!)$ (תמיד מתקיים ש- $|\sin(x)| \le 1$) וסדרה ששואפת ל-0, $\frac{1}{n}$.

משפט 3. $a_n \to L \Leftrightarrow a_n - L \to 0$.

משפט 4. *אם 2 הסדרות שואפות ל-0 אז גם הסכום והמכפלה שלהן שואפות ל-0.*

הוכחה. בדי להוכיח שהמכפלה שואפת ל-0, פשוט נזכור שאחת הסדרות חסומה (כי מתכנסת) והשנייה שואפת ל-0 ולכן המכפלה שלהן שואפת ל-0. עבור סכום, צריך להוכיח ש-

$$\forall\epsilon > 0 \exists N \forall n > N : |a_n + b_n - 0| < \epsilon$$

יהי $\epsilon > 0$, מהנתון ומהגדרת גבול אנו יודעים ש-

$$\exists N_1 \forall n > N_1 : |a_n - 0| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\exists N_2 \forall n > N_2 : |b_n - 0| < \frac{\epsilon}{2}$$

לכן אם נגדיר $N = max\{N_1, N_2\}$ יתקיים

$$\forall n > N : |a_n + b_n - 0| = |a_n + b_n| \le |a_n| + |b_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

מצאנו N כנדרש.

$\square$

משפט 5 (אריתמטיקה של גבולות)**.** *נניח ש-* $a_n \to a, b_n \to b$ *(כאשר* $a, b \in \mathbb{R}$ *) אזי:*

1. $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$
2. $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$
3. *אם* c *קבוע אז* $c \cdot a_n \to ca$
4. *אם* $a > 0$ *אז* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}$

הוכחה. 1. נסמן $x_n = a_n - a, y_n = b_n - b$ ועפ"י משפט, הם שואפים ל-0. מהמשפט הקודם, הסכום שלהם שואף ל-0:

$$x_n + y_n = a_n - a + b_n - b = (a_n + b_n) - (a + b) \to 0$$

לפי משפט, זה אומר ש- $a_n + b_n \to a + b$

2. אם נסתכל על אותם x_n, y_n אז מהמשפט הקודם, המכפלה שלהם שואפת ל-0.

$$a_n b_n = (x_n + a)(y_n + b) = x_n y_n + a \cdot y_n + b \cdot x_n + ab$$

כל אחד מארבעת הרכיבים מתכנס: הראשון ל-0, השני והשלישי הם סדרות ששואפות ל-0 כפול מספר קבוע (שאפשר להתייחס אליו כאל סדרה חסומה) ולכן שואפות ל-0 והרביעי הוא סדרה קבועה ששואפת ל- ab. סך הכל, מהדבר האחרון שהוכחנו (סכום גבולות), $a_n b_n \to ab$

3. נגדיר $\forall n : c_n = c$ ונראה ש- $c_n \to c$, ממשפטון 2 נקבל את הדרוש

4. יהי אפסילון גדול מ-0. נראה שמתקיימים הדברים הבאים:
$\exists N_0 \forall n > N_0 : ||a_n| - |a|| < |a|$ (לקחנו את הערך המוחלט של a להיות האפסילון).
לכן עבור $n > N_0$ מתקיים ש- $|a| < 2|a_n|$

$$|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}| = |\frac{a - a_n}{a_n a}| = \frac{|a - a_n|}{|a_n||a|} \leq |a - a_n| \frac{2}{|a_n||a|}$$

עפ"י הגדרת הגבול

$$\exists N \forall n > N : |a_n - a| \leq \epsilon \frac{|a|^2}{4}$$

מכאן שלכל $n > N$

$$\left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a} \right| \leq |a_n - a| \frac{2}{|a_n||a|} \leq \epsilon \frac{|a|^2}{4} \frac{2}{|a_n||a|} = \epsilon \frac{|a|}{2|a_n|} < \epsilon \frac{2|a_n|}{2|a_n|} = \epsilon$$

□

דוגמה 4. נמצא את גבול הסדרה $a_n = \frac{n^2+5n+6}{3n^2-2}$:

$$a_n = \frac{n^2 + 5n + 6}{3n^2 - 2} = \frac{\frac{n^2+5n+6}{n^2}}{\frac{3n^2-2}{n^2}} = \frac{1 + \frac{5}{n} + \frac{6}{n^2}}{3 - \frac{2}{n^2}}$$

אבל $\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2} \to 0$ ומהסעיף השלישי והראשון במשפט הקודם מסיקים ש-$\frac{5}{n} + \frac{6}{n^2}, \frac{2}{n^2} \to 0$ ואחרי שנחבר את הקבועים נקבל שהמונה שואף ל-1 והמכנה ל-3 ומהסעיף הרביעי נקבל ש- $\lim_{n \to \infty} a_n = \frac{1}{3}$

הערה 2. 1. אם a_n מתכנסת ו- b_n מתבדרת אזי $a_n + b_n$ מתבדרת

2. אם a_n, b_n מתבדרות אזי $a_n + b_n$ עשויה להתבדר או להתכנס (אי אפשר לדעת באופן כללי, זה תלוי בסדרות עצמן)

3. אם $a_n \to L \neq 0$ ו- b_n מתבדרת אזי $a_n b_n$ מתבדרת

4. אם $a_n \to 0$ ו- b_n מתבדרת אזי $a_n b_n$ עשויה להתבדר או להתכנס.

5. אם a_n, b_n מתבדרות אזי $a_n b_n$ עשויה להתבדר או להתכנס

הסבר:

1. נניח בשלילה ש- $c_n = a_n + b_n$ מתכנסת אז נראה כי $c_n - a_n = b_n$ מתכנסת כהפרש של מתכנסות.

2. אפשר להגדיר $a_n = n$, $b_n = n^2$, $c_n = -n$ ולראות ש- $a_n + c_n = 0 \to 0$ ולעומת זאת $b_n + c_n = n(n-1)$ וזה מתבדר.

3. הוכחה בשיעורי הבית

4. הוכחה בשיעורי הבית

5. נגדיר $a_n=(-1)^n$ ואז $a_n\cdot a_n=1\to 1$ למרות ש-2 הגורמים מתבדרים. מצד שני אם מגדירים $b_n=n$ נקבל ש- $a_nb_n=(-1)^n\cdot n$ שזה לא חסום ולכן מתבדר.

<u>תרגיל בית:</u> נסו להשתמש בכך שעבור 2 מספרים a,b תמיד מתקיים $||a|-|b||\leq |a-b|$ כדי להוכיח שאם $a_n\to L$ אז $|a_n|\to |L|$. הפריכו את המשפט ההפוך.

3.1 גבולות אינסופיים

ראינו מה קורה לגבי סדרות ששואפות למספר, אבל לפעמים נוח להגיד שסדרה "שואפת לאינסוף", כמו במקרה של $1,2,3,4,\cdots$. מתי נגיד שזה מתקיים? אם הסדרה מצליחה בסופו של דבר לעקוף כל מספר, לא חשוב כמה הוא גדול. במובנים מתמטיים, זה אומר שלכל M (מספר גדול) קיים מקום בסדרה N שכל האיברים אחריו (לכל $n>N$), הסדרה תהיה גדולה יותר מהמספר הגדול M . בשפת כמתים:

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty \Leftrightarrow \forall M\exists N\in\mathbb{N}:a_n>M$$

באותו אופן, אפשר להגדיר שאיפה למינוס אינסוף:

$$\lim_{n\to\infty} a_n=-\infty \Leftrightarrow \forall M\exists N\in\mathbb{N}:a_n<M$$

4.1 פעולות עם גבולות אינסופיים

משפט 6. *1. אם $x_n\to\pm\infty, y_n\to a\in\mathbb{R}$ אזי $\lim_{n\to\infty} x_n+y_n=\pm\infty$ (בהתאם לגבול של x_n)*

2. אם $x_n\to\pm\infty, y_n\to a\in\mathbb{R}$ ו- $a\neq 0$ אזי $\lim_{n\to\infty} x_n\cdot y_n=\text{sign}(a)\cdot\pm\infty$ כאשר הסימן של a מוגדר להיות 1 אם הוא חיובי, -1 אם הוא שלילי ו-0 אם הוא 0.

3. $\lim_{n\to\infty}|x_n|=\infty\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=0$.

גם הצד השני נכון, נסו להוכיח את זה לפי המשפטונים הבאים:

3.1. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=0\wedge x_n>0\Rightarrow x_n\to\infty$

3.2. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=0\wedge x_n<0\Rightarrow x_n\to-\infty$

הוכחה. 1. יהי $M>0$. מהגדרת הגבול של y_n ידוע ש-

$$\exists_{n_1}\forall_{n>n_1}:a-1<y_n<a+1$$

ומהגדרת השאיפה לאינסוף של x_n אנחנו יודעים ש-

$$\exists_{n_2}\forall_{n>n_2}:x_n>M-a+1$$

ולכן אם נגדיר $n_0=\max\{n_1,n_2\}$ אז יתקיים ש-

$$\forall_{n>n_0}:x_n+y_n>(M-a+1)+(a-1)=M$$

2. נוכיח עבור a חיובי, עבור a שלילי ההוכחה דומה מאוד והדבר היחיד כמעט שמשתנה זה סימני אי השיוויון:

יהי $M>0$. מהגדרת הגבול של y_n ידוע ש-

$$\exists_{n_1}\forall_{n>n_1}:\frac{a}{2}<y_n<\frac{3a}{2}$$

ומהגדרת השאיפה לאינסוף של x_n אנחנו יודעים ש-

$$\exists_{n_2}\forall_{n>n_2}:x_n>\frac{2}{a}M$$

ולכן אם נגדיר $n_0=\max\{n_1,n_2\}$ אז יתקיים ש-

$$\forall_{n>n_0}:x_n\cdot y_n>\frac{2}{a}M\cdot\frac{a}{2}=M$$

3. יהי $\epsilon>0$. מהגדרת השאיפה לאינסוף של x_n אנחנו יודעים ש-

$$\exists_{n_0}\forall_{n>n_0}:x_n>\frac{1}{\epsilon}$$

אבל

$$\frac{1}{\epsilon}<|x_n|\Leftrightarrow\frac{1}{|x_n|}<\epsilon$$

וקיבלנו את הדרוש כי

$$\forall_{n>n_0}:|\frac{1}{x_n}|<\epsilon$$

3.1. נוכיח את 3.1 ו- 3.2 מוכח באופן דומה: יהי $M>0$ אז $\exists_{n_0}\forall_{n>n_0}\frac{1}{x_n}<\frac{1}{M}$ ומכאן ש- $\forall_{n>n_0}x_n>M$.

□

5.1 מקרים של כל מקרה לגופו - אי הגדרה:

יהיו x_n,y_n

1. אם $x_n\to\infty,y_n\to-\infty$ אז לא ניתן מהנתונים האלה בלבד לדעת את הגבול של x_n+y_n (במילים אחרות, לא מוגדר $\infty+(-\infty)$)

דוגמה 5.

$$x_n=n,y_n=1-n\Rightarrow x_n+y_n=1\to1$$

$$x_n=n^2,y_n=2-n^2\Rightarrow x_n+y_n=2\to2$$

$$x_n=n^2,y_n=-n\Rightarrow x_n+y_n=n^2-n=n(n-1)\to\infty$$

$$x_n=n,y_n=-n^2\Rightarrow x_n+y_n=-n^2+n=-n(n-1)\to-\infty$$

$$x_n=n,y_n=(-1)^n-n\Rightarrow x_n+y_n=(-1)^n\Rightarrow\text{ Limit doesn'texist}$$

2. אם $x_n\to\infty,y_n\to0$ אז לא ניתן מהנתונים האלה בלבד לדעת את הגבול של $x_n\cdot y_n$

דוגמה 6.

$$x_n = n, y_n = \frac{1}{n} \Rightarrow x_n y_n = 1 \to 1$$

$$x_n = n^2, y_n = \frac{2}{n^2} \Rightarrow x_n y_n = 2 \to 2$$

$$x_n = n^2, y_n = \frac{-1}{n} \Rightarrow x_n y_n = -n \to -\infty$$

$$x_n = n, y_n = \frac{1}{n^2} \Rightarrow x_n y_n = \frac{1}{n} \to 0$$

$$x_n = n, y_n = \frac{(-1)^n}{n} \Rightarrow x_n y_n = (-1)^n \Rightarrow \text{ Limit doesn'texist}$$

3. אם שתי הסדרות שואפות ל-0 אז לא ניתן מהנתונים האלה בלבד לדעת את הגבול של $\frac{x_n}{y_n}$

דוגמה 7. אם ניקח כל זוג מהדוגמאות של מקרה 2 ונחליף את x_n בהופכי שלו, נקבל דוגמאות ל-3 (חשבו מה קורה במקרה זה ל- $\frac{y_n}{x_n}$)

<u>תרגיל:</u> מהו $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$?

<u>פתרון:</u> נשתמש בשיטה שנקראת "כפל בצמוד" והיא נקראת כך מהדמיון לרעיון של חילוק מספרים מרוכבים (לא חלק מהחומר של הקורס)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$$

6.1 משפט הסנדוויץ'

משפט 7 (משפט הסנדוויץ'). *תהיינה הסדרות* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *כך ש-* $\forall n :$ $a_n \le x_n \le b_n$ *ובנוסף* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = L$ *אזי הסדרה* x_n *מתכנסת והגבול שלה הוא* L.

הערה 3. שם המשפט נובע מכך שהסדרה האמצעית היא באמצע של מעין סנדוויץ' שיוצרות הסדרות a_n, b_n ששואפות לאותו גבול. פרופסור מארק אגרנובסקי מספר שברוסיה נהוג לקרוא למשפט הזה המשפט על שיכור ו-2 שוטרים משום שהסדרות a_n, b_n הן כמו שוטרים שהולכים למקום מסוים L וגוררים שיכור שהולך ביניהם x_n ללכת איתם לאותו מקום

הוכחה. אם $L = \infty$ אז פשוט עבור $M > 0$ ידוע שיש n_0 שמתקיים עבורו $\forall_{n>n_0} a_n > M$ ואז גם $x_n \ge a_n > M$. באותו אופן אם $L = -\infty$ אז נעשה אותו דבר רק עם העובדה ש- $x_n \le b_n \le M$.
אם $L \in \mathbb{R}$, יהי $\varepsilon > 0$. ידוע אז ש-

$$\exists_{n_1} \forall_{n>n_1} : L - \epsilon < a_n, \exists_{n_2} \forall_{n>n_2} : b_n < L + \epsilon$$

ואז עבור $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ מתקיים ש- $\forall_{n>n_0} : L - \epsilon < a_n \le x_n \le b_n < L + \epsilon$ ומכאן, ש- $|x_n - L| < \epsilon$ ואז לפי ההגדרה, $x_n \to L$. $\square$

דוגמה 8. נסתכל על הסדרה $a_n = n \cdot \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$. אי אפשר להשתמש באריתמטיקה של גבולות במקרה הזה, אך נראה כי מתקיים:

$$0 \le n \cdot \sin \frac{1}{n^2} \le n \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$$

שימו לב שאי השיוויון השני נובע מכך ש- $\sin x < x$ לכל x חיובי.
קיבלנו שהסדרה לכודה בין 0 (שכמובן שואף ל-0) לבין $\frac{1}{n}$ (סדרה שגם היא שואפת ל-0) ולכן בסך הכל, ממשפט הסנדוויץ', הסדרה מתכנסת ל-0.

7.1 אי שיוויונים של גבולות

משפט 8. *נניח* $L \to x_n$ *אזי*

1. *לכל* $p < L$ *קיים* n_1 *כך ש-* $n > n_1 \Rightarrow x_n > p$
2. *לכל* $q > L$ *קיים* n_2 *כך ש-* $n > n_2 \Rightarrow x_n < q$

הוכחה. אם נציב בהגדרת הגבול של L את $\lim_{n\to\infty} x_n = L$ $\varepsilon = L - p$ נוכיח ישירות את 1 ואם נציב $\varepsilon = q - L$ נוכיח ישירות את 2. □

מסקנה 9. *אם* $x_n \to a, y_n \to b$ *כש-* $a < b$ *אז* $\exists_{n_0} \forall_{n > n_0} x_n < y_n$

הוכחה. אם ניקח $p = \frac{a+b}{2}$ שהוא בין a ל-b אז לפי המשפט הקודם מתקיים:

$$\exists_{n_1} \forall_{n > n_1} : x_n < p, \exists_{n_2} \forall_{n > n_2} : y_n > p$$

ואז עבור $n > n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ מתקיים ש- $x_n < p < y_n$. □

מסקנה 10 (גבול שומר על אי שיוויון חלש). *כלומר אם* $x_n \le y_n$ *ו-* $x_n \to a, y_n \to b$ *אז* $a \le b$

הוכחה. נניח בשלילה ש- $a > b$ אזי מהמסקנה הקודמת $\exists_{n_0} \forall_{n > n_0} y_n < x_n$ בסתירה לנתון. □

הערה 4 (גבול לא שומר על אי שיוויון חזק). אם ניקח את $y_n = \frac{1}{n}$ ו- $x_n = 0$ אזי $x_n < y_n$ אבל שתי הסדרות מתכנסות **ולא נכון** להגיד ש- $\lim\limits_{n\to\infty} x_n < \lim\limits_{n\to\infty} y_n$

מסקנה 11 (גבול סדרה הוא יחיד). *כלומר אם* $x_n \to L_1, x_n \to L_2$ *אזי* $L_1 = L_2$

הוכחה. $x_n \le x_n$ ולכן, מהמסקנה הקודמת, $L_1 \le L_2$ ובאותה דרך $L_2 \le L_1$. מכאן ש- $L_1 = L_2$ □