1 מרחק – מרחבים מטריים Metric Spaces

הגדרנו מהו האורך של כל ווקטור, ובעת נגדיר מהו מרחק בין כל שני ווקטורים.

הגדרה 1. יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. **מרחק** הוא פונקציה $\rho : V \times V \to \mathbb{R}$, המקיימת את האקסיומות הבאות:

1. <u>אי-שליליות</u> –
   (א) לכל $x, y \in V$, $\rho(x,y) \geq 0$.
   (ב) $x = y \Leftrightarrow \rho(x) = \rho(y)$.
2. <u>סימטריות</u> – לכל $x, y \in V$, $\rho(x,y) = \rho(y,x)$.
3. <u>אי-שוויון המשולש</u> – לכל $x, y, z \in V$, $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$.

הערה 1. המרחק המושרה על ידי הנורמה הוא $\rho(x,y) = \|x - y\|$.

הוכחה. נוכיח שזה אכן מרחק.

1. <u>אי-שליליות</u> – נובע ישירות מהאקסיומה הראשונה של נורמה.
   נורמה היא אי-שלילית, ולכן המרחק המושרה הוא אי-שלילי.

$$\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow \|x-y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$$

2. <u>סימטריות</u> – לכל $x, y \in V$,

$$\rho(x,y) = \|x-y\| = \|(-1)(y-x)\| = |-1|\,\|y-x\| = \rho(y,x)$$

3. <u>אי-שוויון המשולש</u> – לכל $x, y, z \in V$,

$$\rho(x,z) = \|x-z\| = \|(x-y)+(y-z)\| \leq \|x-y\|+\|y-z\| = \rho(x,y)+\rho(y,z)$$

□

דוגמה 1. ניקח את V להיות המרחב הווקטורי של כל הפונקציות הרציפות $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.

1. נגדיר מכפלה פנימית על V על ידי $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x$.
   הנורמה המושרית: $\|f\| = \sqrt{\int_0^1 [f(x)]^2\,\mathrm{d}x}$.
   המרחק המושרה: $\rho(x,y) = \sqrt{\int_0^1 [f(x) - g(x)]^2\,\mathrm{d}x}$.
2. נגדיר נורמה על V על ידי $\|f\| = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$.

2 נורמליות, אורתוגונליות ואורתונורמליות

1.2 נורמליות

הגדרה 2. יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$, ותהי $\|\ \| : V \to \mathbb{R}$ נורמה על V. אומרים שווקטור $v \in V$ הוא **נורמלי**, אם $\|v\| = 1$ (וקטור יחידה).

אם $v \neq 0$, אזי נגדיר נרמול של הווקטור v: $v^0 = \frac{1}{\|v\|} v$.

הערה 2. הווקטור v^0 נורמלי.

הוכחה. $\|v^0\| = \left\|\frac{1}{\|v\|} v\right\| \overset{(2)}{=} \left|\frac{1}{\|v\|}\right| \|v\| \overset{(1)}{=} \frac{1}{\|v\|} \|v\| = 1$.

□

2.2 אורתוגונליות

הגדרה 3. יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{F}$. אומרים שווקטור $u \in V$ **מאונך** לווקטור $v \in V$, אם $\langle u, v \rangle = 0$. נסמן $u \perp v$.

הערה 3. התכונות של וקטורים מאונכים:

1. <u>סימטריות</u> - אם $u \perp v$, אזי $v \perp u$.

   הוכחה. $\langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle} = \overline{0} = 0$.

□

2. <u>וקטור האפס</u> - לכל $v \in V$ מתקיים $v \perp 0$.

   הוכחה. $\langle 0, v \rangle = \langle 0 + 0, v \rangle \overset{(1)}{=} \langle 0, v \rangle + \langle 0, v \rangle \Rightarrow 0 = \langle 0, v \rangle$.

□

3. <u>הכפלה בסקלר</u> - אם $w \perp v$, אזי $\alpha v \perp \beta w$ לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$.

   הוכחה. $\langle \alpha v, \beta w \rangle = \alpha \overline{\beta} \langle v, w \rangle = \alpha \overline{\beta} 0 = 0$.

□

הגדרה 4. תהי $S \subseteq V$ קבוצה. אומרים ש-S **קבוצה אורתוגונלית (orthogonal)** אם כל שני איברים שונים של S מאונכים זה לזה.

משפט 1. *אם S קבוצה אורתוגונלית, וכן $0 \notin S$, אזי S קבוצה בלתי תלויה לינארית.*

הוכחה. נניח שקיימים $v_1, \ldots, v_n \in S$ ו-$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ כך ש-$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$. "נכפול" ב-$v_1$ את שני הצדדים:

$$\langle \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n, v_1 \rangle = \langle 0, v_1 \rangle \Rightarrow \alpha_1 \langle v_1, v_1 \rangle + \cdots + \alpha_n \langle v_n, v_1 \rangle = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_1 \langle v_1, v_1 \rangle = 0 \overset{v_1 \neq 0}{\Rightarrow} \alpha_1 = 0$$

באופן דומה נמשיך ונקבל $\alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

□

3.2 אורתונורמליות

בעת נשלב בין שני המושגים שלמדנו: נורמליות ואורתוגונליות.

הגדרה 5. אומרים שקבוצה $S \subseteq V$ היא **אורתונורמלית** אם היא אורתוגונלית, ואם כל הווקטורים של S נורמליים.

למה 2. *כל קבוצה אורתונורמלית היא בלתי תלויה לינארית.*

הוכחה. S אורתוגונלית, וכן $0 \notin S$, כי $\|0\| = 0$.

□

הגדרה 6. בסיס B של V, כך שהוא קבוצה אורתוגונלית (אורתונורמלית) נקרא **בסיס אורתוגונלי (אורתונורמלי)** של V.

הרעיון – במרחב $\mathbb{R}^n$ יחד עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית, וקטורי היחידה של הצירים הם בסיס אורתונורמלי. כלומר, בסיס אורתונורמלי יוצר מערכת צירים, שבה הצירים מאונכים זה לזה. בהמשך נוכיח שלכל מרחב מכפלה פנימית קיים בסיס אורתונורמלי.

1.3.2 חישוב מכפלה פנימית ביחס לבסיס אורתונורמלי

הערה 4. אם $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ בסיס אורתונורמלי, אזי $G_B = I$.

הוכחה. $\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

□

הערה 5 (חישוב מכפלה פנימית בבסיס אורתונורמלי). ראינו שמטריצת גראם ביחס לבסיס אורתונורמלי היא מטריצת היחידה, ואם כן – נראה שקל יחסית לחשב באמצעותו מכפלה פנימית. יהיו $u, v \in V$. אזי:

$$\langle u, v \rangle = [u]_B^t \, G_B \overline{[v]_B} = [u]_B^t \, \overline{[v]_B}$$

כלומר, אם $u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$, ואם $v = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n$, אזי

$$\langle u, v \rangle = \alpha_1 \overline{\beta_1} + \cdots + \alpha_n \overline{\beta_n}$$

בדיוק כמו למכפלה הסטנדרטית ב-$\mathbb{F}^n$ יחסית לבסיס הסטנדרטי.

2.3.2 חישוב צירוף לינארי לפי בסיס אורתונורמלי

בסיס אורתונורמלי נותן גם דרך פשוטה לחישוב המקדמים בצירוף הלינארי של וקטור הנפרש על ידי הבסיס.

הערה 6. יהי $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ בסיס אורתונורמלי של V, ויהי $u \in V$, כאשר מתקיים $u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$. אזי $\alpha_i = \langle u, v_i \rangle$.

הוכחה.

$$\langle u, v_i \rangle = \langle \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n, v_i \rangle = \alpha_1 \underbrace{\langle v_1, v_i \rangle}_{=0} + \cdots + \alpha_i \underbrace{\langle v_i, v_i \rangle}_{=1} + \cdots + \alpha_n \underbrace{\langle v_n, v_i \rangle}_{=0} = \alpha_i$$

□

3.3.2 הכללת משפט פיתגורס

בעת נוכיח הכללה של משפט פיתגורס.

משפט 3. *משפט פיתגורס*
יהי $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ *בסיס אורתונורמלי של* V*, ויהי* $u \in V$, $u = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$.
אזי $\|u\|^2 = |\alpha_1|^2 + \dots + |\alpha_n|^2$

הוכחה.

$$\|u\|^2 = \langle u, u\rangle = \langle \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n, \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \overline{\alpha_j}\langle v_i, v_j\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\alpha_i} \underbrace{\langle v_i, v_i\rangle}_{=1} = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2$$

□

3 מטריצות אוניטריות

נעזוב לרגע את הנושא שהתחלנו, ונגדיר סוג מיוחד של מטריצות. בהמשך נראה את הקשר ביניהן לבין המושגים הנ"ל.

הגדרה 7. לכל מטריצה ריבועית A נגדיר $A^* = \overline{A^t} = \overline{A}^t$.

הגדרה 8. אומרים ש-A אוניטרית אם $AA^* = A^*A = I$.

הערה 7. מההגדרה נובע שכל מטריצה אוניטרית היא הפיכה.

הערה 8. תנאי שקול לאוניטריות: $A^{-1} = A^*$.

הערה 9. אם A אוניטרית, אזי A^t אוניטרית.

הוכחה. $\overline{A} = \overline{(A^t)^t} = (A^t)^*$, וביוון ש-$A^{-1} = A^*$, נקבל כי $\overline{A} = (A^t)^* = (A^*)^t = (A^{-1})^t$.

□

הערה 10. תהי A מטריצה אוניטרית. אזי A^{-1} גם אוניטרית.

הוכחה.

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A = (A^*)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^*$$

□

הערה 11. אם A, B מטריצות אוניטריות, אזי גם AB אוניטרית.

הוכחה.

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B^*A^* = (AB)^*$$

□