1 מרחבי מכפלה פנימית

אנחנו מתחילים פרק חדש בחומר שלנו, שבו ננסה להגדיר גיאומטריה במרחבים וקטוריים. הכוונה ב"גיאומטריה" היא שנגדיר אורך וזווית של וקטורים. לצורך כך, נגביל את השדה שאנו עובדים מעליו, $\mathbb{F}$, ל-$\mathbb{R}$ או ל-$\mathbb{C}$. לא נציין זאת בכל פעם, אך נניח הנחה זו מעתה ועד סוף הקורס.

הגדרה 1. יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. **מכפלה פנימית** היא העתקה $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{F}$, המוגדרת על ידי $(v, w) \mapsto \langle v, w\rangle$, והמקיימת את האקסיומות הבאות:

1. לינאריות ברכיב הראשון - לכל $v_1, v_2, w \in V$ ולכל $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$,
$$\langle \alpha v_1 + \beta v_2, w\rangle = \alpha \langle v_1, w\rangle + \beta \langle v_2, w\rangle$$
2. הרמיטיות - לכל $v, w \in V$, $\langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle}$.
3. אי-שליליות - בחלק זה יש שתי דרישות:
   (א) לכל $v \in V$, $\langle v, v\rangle \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.
   (ב) $\langle v, v\rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$.

דוגמה 1. **המכפלה הפנימית הסטנדרטית** ב-$\mathbb{F}^n$, הינה המכפלה הפנימית המוגדרת באופן הבא: יהיו $v, w \in \mathbb{F}^n$, $v = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}$. אזי נגדיר
$$\langle v, w\rangle = \alpha_1\overline{\beta_1} + \cdots + \alpha_n\overline{\beta_n}$$

הוכחה. נוכיח שזו אכן מכפלה פנימית.

1. לינאריות ברכיב הראשון - טריוויאלי לפי ההגדרה.
2. הרמיטיות - לפי התכונה $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$.
3. אי-שליליות -
   (א) לפי התכונה $z\overline{z} = |z|^2$, נקבל שמתקיים $\langle v, v\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i\overline{\alpha_i} = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \geq 0$
   (ב) לפי החישוב הנ"ל, ובצירוף $|\alpha_i| = 0 \Leftrightarrow \alpha_i = 0$, מקבלים את הדרוש.

□

הערה 1. הוכחנו שיש לינאריות ברכיב הראשון. עם זאת, לא דרשנו מאומה על הרכיב השני. ניתן לשים לב ששתי האקסיומות הראשונות גוררות שברכיב השני יש כמעט לינאריות, **חצי לינאריות** (Sesquilinear), כלומר:

$$\langle v, \alpha w_1 + \beta w_2\rangle \overset{(2)}{=} \overline{\langle \alpha w_1 + \beta w_2, v\rangle} \overset{(1)}{=} \overline{\alpha \langle w_1, v\rangle + \beta \langle w_2, v\rangle} =$$
$$= \overline{\alpha}\ \overline{\langle w_1, v\rangle} + \overline{\beta}\ \overline{\langle w_2, v\rangle} \overset{(2)}{=} \overline{\alpha} \langle v, w_1\rangle + \overline{\beta} \langle v, w_2\rangle$$

הגדרה 2. מרחב וקטורי V יחד עם מכפלה פנימית שהוגדרה עליו נקרא **מרחב מכפלה פנימית**. כלומר, פשוט רוצים להדגיש שמוגדרת מכפלה פנימית על המרחב.

1.1 חישוב מכפלה פנימית

הגדרה 3. יהי $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס של V. נגדיר מטריצה ריבועית G_B (מגודל $n \times n$) כך:

$$G_B = \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_1, v_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_n, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_n, v_n \rangle \end{pmatrix}$$

המטריצה G_B נקראת **מטריצת גראם** על שם Gram.

הערה 2. יהיו $v, w \in V$, יהי B בסיס של V, ונסמן $[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, $[w]_B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$, וכן $g_{ij} = [G_B]_{ij}$. אזי:

$$\langle v, w \rangle = \langle \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n, \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta}_j \langle v_i, v_j \rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i g_{ij} \overline{\beta}_j = [v]_B^t \, G_B \overline{[w]_B}$$

דוגמה 2. ניקח $V = \mathbb{F}^n$ עם הבסיס הסטנדרטי $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ ועם המכפלה הפנימית הסטנדרטית, שהוגדרה קודם לכן. על ידי חישוב ישיר, קל לראות כי

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

אם כן, $G_B = I$, ולכן $\langle v, w \rangle = v^t \overline{w}$ (קל לוודא גם על ידי חישוב ישיר).

הערה 3. δ_{ij} נקרא גם **הדלתא של קרונקר**.

2.1 שינוי בסיס

ננסה כעת לבדוק מה קורה למטריצת גראם, אם משנים את הבסיס שבו אנו עובדים.

יהיו B, B' בסיסים של V, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$, וכן $B' = \{v'_1, \dots, v'_n\}$. נסמן ב־$G, G'$ את מטריצות גראם של המכפלה הפנימית $\langle \ , \ \rangle$ יחסית לבסיסים B, B' בהתאמה.

משפט 1. *תהי C מטריצת המעבר מ-B' ל-B. אזי $G' = C^t G \overline{C}$, כאשר $\overline{C}$ = הצמדת כל האיברים במטריצה C.*

הוכחה. יהי $v \in V$, B, B' בסיסים ו־C מטריצת המעבר מ־B' ל־B. אזי $[v]_B = C \, [v]_{B'}$, כלומר $[v]_B^t = [v]_{B'}^t \, C^t$.

מצד אחד, B' בסיס, ולכן $\langle v, w \rangle = [v]_{B'}^t \, G' \overline{[w]_{B'}}$. עם זאת, גם B בסיס, ולכן $\langle v, w \rangle = [v]_B^t \, G \overline{[w]_B} = [v]_{B'}^t \, C^t G \overline{C} \, \overline{[w]_{B'}}$.

בסך הכל, $G' = C^t G \overline{C}$, כדרוש.

□

2 נורמה

הגענו להגדרת המושג ”נורמה”, שהוא הכללה של אורך. באופן כללי, נרצה שאורך יהיה מספר ממשי אי-שלילי, ושרק וקטור האפס יהיה מאורך אפס; נרצה שמתיחת וקטור תגדיל (או תקטין, אם מדובר על כיווץ) פי אותו גורם (בערך מוחלט, אם הוא שלילי); ונרצה שיתקיים אי-שוויון המשולש המפורסם (סכום שתי צלעות במשולש גדול מהצלע השלישית). ננסח את ההגדרה:

הגדרה 4. יהי V מעל $\mathbb{F}$ מרחב וקטורי. **נורמה** היא פונקציה $\|\ \| : V \to \mathbb{R}$, המקיימת את האקסיומות הבאות:

1. <u>אי-שליליות</u> -
   (א) לכל $v \in V$, $\|v\| \geq 0$.
   (ב) $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$.
2. <u>הומוגניות</u> - לכל $v \in V$ ולכל $\alpha \in \mathbb{F}$, $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$.
3. <u>אי-שוויון המשולש</u> - לכל $u, v \in V$, $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

הערה 4. אם V מרחב מכפלה פנימית, אזי נגדיר נורמה על V: $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$.

הוכחה. נוכיח שזו אכן נורמה.

1. <u>אי-שליליות</u> - טריוויאלי.
2. $\|\alpha v\| = \sqrt{\langle \alpha v, \alpha v\rangle} = \sqrt{\alpha\overline{\alpha}\langle v, v\rangle} = \sqrt{|\alpha|^2 \langle v, v\rangle} = |\alpha| \sqrt{\langle v, v\rangle} = |\alpha| \|v\|$
3. נבדוק בהמשך, ובינתיים נאמין. כלומר, • - חור.

$\square$

נורמה כזו נקראת **הנורמה המושרית על ידי המכפלה הפנימית**.