הגיע הזמן לשלב את כל המשפטים שהיו לנו עד כה למשפט האולטימטיבי - משפט ז'ורדן הכללי. במשפט זה נשתמש בפירוק של המרחב V לסכום ישר של המרחבים העצמיים המוכללים, ובכך נצמצם את האופרטור לאופרטורים בעלי ערך עצמי יחיד. הוכחנו עבורם את המשפט, וזה יוכיח את משפט ז'ורדן הכללי. עבור היחידות תידרש מעט עבודה, אבל גם היא תגיע.

משפט: משפט ז'ורדן הכללי

יהי $T : V \to V$ אופרטור לינארי כך ש־$p_T(x)$ מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים. אזי T ניתן להצגה אלכסונית בלוקים, כך שכל בלוק הוא מהצורה $J_{m_i}(\lambda_i)$. הצגה זו יחידה עד כדי סדר הבלוקים.

הוכחה:

קיום נסמן $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ הערכים העצמיים השונים של T. נתבונן בפירוק של V לסכום ישר של תתי־מרחבים עצמיים מוכללים: $V = K_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus K_{\lambda_s}$. הוא קיים בגלל ההנחה על הפולינום האופייני.

נתבונן, לכל $i = 1, \ldots, s$, בצמצום $T_i = T|_{K_{\lambda_i}}$. לכל T_i יש ערך עצמי יחיד λ_i, ולכן, לפי המשפט הקודם, T ניתן להצגה בצורה אלכסונית בלוקים, כך שכל בלוק הוא מהצורה $J_m(\lambda_i)$.

נתבונן באיחוד הזר $B = B_1 \cup \cdots \cup B_s$. בבסיס זה, נקבל ל־$T$ את הצורה הנדרשת.

יחידות יהי B בסיס מז'רדן ל־T, ויהי λ ערך עצמי של T.

נסדר את האיברים של B, כך שכל הבלוקים מהצורה $J_m(\lambda)$ יופיעו בחלק השמאלי העליון. נקבל

$$[T]_B = \begin{pmatrix} A_\lambda & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix}$$

כאשר ב־A_λ יופיעו כל הבלוקים מהצורה $J_m(\lambda)$, וב־A' של שאר הערכים העצמיים.

הגודל של A_λ נקבע באופן יחיד על ידי T, כי גודלו הוא בדיוק הריבוי האלגברי של λ.

אם נסמן $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$, אזי $A_\lambda = [T]_{\{v_1,\ldots,v_k\}}$, כאשר $\operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_k\}$ אינווריאנטי. לאופרטור $T|_{\operatorname{span}\{v_1,\ldots,v_k\}}$ יש ערך עצמי יחיד, והמטריצה המייצגת שלו היא A_λ. לכן, לפי משפט היחידות לאופרטור עם ערך עצמי יחיד, מספר הבלוקים ב־A_λ מוגדר באופן יחיד על ידי T, כדרוש.