הוכחנו שצורת ז'ורדן של אופרטור נילפוטנטי קיימת. כעת, נוכיח כי היא יחידה (עד כדי שינוי סדר הבלוקים). ניעזר לכך בלמה הבאה:

למה:

יהי $E=\left\{T^{m-1}(v),\dots,T(v),v\right\}$ מסלול מאורך m, יהי $V_0=\operatorname{span}(E)$, ויהי $T=T|_{V_0}$. אזי

$$\dim\left(\ker T_0\cap\operatorname{im}T_0^j\right)=\begin{cases}1, & j<m\\ 0, & j\geq m\end{cases}$$

הוכחה:

נניח $j\geq m$.

$$T^m(v)=0\Rightarrow T^j(v)=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow T^j[E]=\{0\}\Rightarrow\operatorname{im}T_0^j=\{0\}\Rightarrow\dim\left(\ker T_0\cap\operatorname{im}T_0^j\right)=0$$

נניח $j<m$.

נתבונן בווקטורים $T(v),\dots,T^{m-1}(v)$. לכן, $\dim(\operatorname{im}T_0)\geq m-1$.

לכן, $\dim(\ker T_0)+(m-1)\leq\dim(\ker T_0)+\dim(\operatorname{im}T_0)=\dim V_0=m$, כלומר $\dim(\ker T_0)\leq 1$, ומכאן $\dim\left(\ker T_0\cap\operatorname{im}T_0^j\right)\leq 1$.

נתבונן בווקטור $T^{m-1}(v)\neq 0$ (לפי הגדרת המסלול). מצד שני, $T^{m-1}(v)=T^j\left(T^{m-j-1}(v)\right)\in\operatorname{im}T_0^j$, ובנוסף $T\left(T^{m-1}(v)\right)=T^m(v)=0$, כלומר $T^{m-1}(v)\in\ker T$, כדרוש.

הגיע הזמן לעבור להוכחת היחידות של צורת ז'ורדן.

משפט: משפט ז'ורדן הנילפוטנטי - יחידות

יהי $T:V\to V$ אופרטור נילפוטנטי מסדר k, ויהי B בסיס מז'רדן ל-T. אזי מספר המסלולים מכל אורך ב-B מוגדר באופן יחיד על ידי T (ולכן, מספר הבלוקים מכל גודל ב-$[T]_B$ מוגדר ביחידות).

הוכחה:

נוכיח כי:

1. המסלול הארוך ביותר ב-B הוא מסדר k.

   אם כל המסלולים ב-B הם מאורך קטן מ-k, אזי $T^{k-1}=0$, ולכן סדר הנילפוטנטיות של T הוא $k-1$, בסתירה להנחה.

   אם קיים מסלול מאורך גדול מ-k, אז יחד עם $T^k=0$ נקבל כי 0 שייך למסלול, בסתירה להגדרת המסלול.

2. לכל $j=1,\dots,k$, מספר המסלולים מאורך הגדול מ-j שווה ל-$\dim\left(\ker T\cap\operatorname{im}T_0^j\right)$.

   נסמן $E_1,\dots,E_r$ המסלולים ב-B. נסמן לכל $i=1,\dots,r$, $V_i=\operatorname{span}(E_i)$.
   נתבונן בסכום הישר של תתי-מרחבים אינווריאנטיים $V=V_1\oplus\cdots\oplus V_r$. נסמן לכל $i=1,\dots,r$, $T_i=T|_{V_i}$.

   לכן, לפי למה קודמת, $\ker T=\ker T_1\oplus\cdots\oplus\ker T_r$, וכן $\operatorname{im}T=\operatorname{im}T_1\oplus\cdots\oplus\operatorname{im}T_r$.

   לכן, לפי הלמה על חיתוך סכום ישר, נקבל כי

   $$\ker T\cap\operatorname{im}T^j=\left(\ker T_1\cap\operatorname{im}T_1^j\right)\oplus\cdots\oplus\left(\ker T_r\cap\operatorname{im}T_r^j\right)$$

   לפי הלמה הקודמת, לכל $s=1,\dots,r$, $\dim\left(\ker T_s\cap\operatorname{im}T_s^j\right)=\begin{cases}1, & j<\ell\\ 0, & j\geq\ell\end{cases}$, כאשר ℓ הוא אורך המסלול.

   אם כן, מספר המסלולים מאורך הגדול מ-j הוא $\dim\left(\ker T\cap\operatorname{im}T^j\right)$, שזה הסכום על אורך כל המסלולים שסדרם גדול מ-j, כדרוש.

3. **לכן, מספר המסלולים מאורך j בדיוק שווה ל:**

$$\dim\left(\ker T \cap \operatorname{im} T^{j-1}\right) - \dim\left(\ker T \cap \operatorname{im} T^{j}\right)$$