1 משפט ז'ורדן הנילפוטנטי

לפני שנוכיח את משפט ז'ורדן המלא, נוכיח גרסאות חלשות יותר, ומהן נגיע לגרסה המלאה.

משפט: משפט ז'ורדן הנילפוטנטי

זהו משפט ז'ורדן בהנחה ש־$T : V \to V$ נילפוטנטי.

נניח ש־$T : V \to V$ הוא אופרטור נילפוטנטי. אזי כל הערכים העצמיים שלו הם 0. זאת אומרת, צריך להוכיח של־T יש מטריצה מייצגת בצורת אלכסונית בלוקים, וכל בלוק הוא בצורה $J_m(0)$. אם כן, נרצה לבנות בסיס B כאיחוד זר $B = B_1 \cup \dots \cup B_k$, כך שלכל $i = 1, \dots, k$, המטריצה המייצגת של T יחסית ל־B_i היא מהצורה $J_m(0)$. הלמה הבאה תוכיח מתי זה קורה, כלומר מהי הצורה של החלקים $B_1, \dots, B_k$.

למה:

יהי E בסיס של V. אזי $[T]_E = J_n(0)$ אם ורק אם $E = \left\{T^{m-1}(v), \dots, T(v), v\right\}$, כאשר $T^n(v) = 0$.

הוכחה:

$\boxed{\Leftarrow}$

נניח $E = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס שעבורו $[T]_B = J_n(0)$. אזי

$$[T]_E = \left([T(v_1)]_E, \dots, [T(v_n)]_E\right) = (0, e_1, \dots, e_{n-1})$$

לפי שוויון כל עמודה בנפרד, נקבל:

$$[T(v_1)]_E = 0 \Rightarrow T(v_1) = 0$$
$$[T(v_2)]_E = e_1$$
$$\vdots$$
$$[T(v_n)] = e_{n-1}$$

נגדיר $v = v_n$. אזי נקבל:

$$[T(v)]_E = e_{n-1} = [v_{n-1}]_E \Rightarrow T(v) = v_{n-1}$$
$$\left[T^2(v)\right]_E = e_{n-2} = [v_{n-2}]_E \Rightarrow T^2(v) = v_{n-2}$$
$$\vdots$$
$$\left[T^{n-1}(v)\right]_E = e_1 = [v_1]_E \Rightarrow T^{n-1}(v) = v_1$$
$$[T^n(v)]_E = 0 \Rightarrow T^n(v) = 0$$

ולכן $E = \left\{T^{m-1}(v), \dots, T(v), v\right\}$, כדרוש.

$\boxed{\Rightarrow}$

נניח ש־$E = \left\{T^{m-1}(v), \dots, T(v), v\right\}$. נחשב את המטריצה המייצגת $[T]_E$:

$T\left(T^{n-1}(v)\right) = T^n(v) = 0$, ולכן העמודה הראשונה במטריצה המייצגת היא 0.

$T\left(T^{n-2}(v)\right) = T^{n-1}(v)$, ולכן העמודה השנייה היא e_1.

באופן דומה ניתן להמשיך ולקבל $[T]_E = J_n(0)$.

הראינו כי אנחנו חייבים לחלק את הבסיס שלנו למסלולים, כדי שהמטריצה המייצגת תהיה בצורת ז'ורדן. נותר לבדוק האם תתי־המרחבים הנפרשים על ידם הם אינווריאנטיים. ניעזר בהערה הבאה:

<u>הערה:</u>

$$T[span\{v_1, \dots, v_k\}] = span\{T(v_1), \dots, T(v_k)\} = span(T[\{v_1, \dots, v_k\}])$$

למה:

אם $E = \left\{T^{m-1}(v), \dots, T(v), v\right\}$ הוא מסלול מאורך m, אזי $spanE$ הוא אינווריאנטי.

הוכחה:

נתבונן ב־$i = 0, \dots, i-2$. אזי $T\left(T^i(v)\right) = T^{i+1}(v) \in E \subseteq spanE$.

עבור $i = m-1$, $T\left(T^{m-1}(v)\right) = T^m(v) = 0 \in spanE$.

לפי ההערה הקודמת, קיבלנו את מה שרצינו להוכיח.

רגע לפני שנוכיח את משפט ז'ורדן הנילפוטנטי, נגדיר הגדרה שתעזור במינוח.

הגדרה:
בסיס E כך שהמטריצה המייצגת של T יחסית ל־E היא בצורת ז'ורדן, נקרא **בסיס מז'רדן**.

1.1 הוכחת משפט ז'ורדן הנילפוטנטי

הוכחת משפט ז'ורדן הנילפוטנטי:
לא לבעלי לב חלש!
נניח כי $T:V\to V$ אופרטור נילפוטנטי מסדר k. נשים לב ש־$im\left(T^{k-1}\right)\subseteq\ker T$, ולכן

$$im\left(T^{k-1}\right)\subseteq im\left(T^{k-2}\right)\cap\ker T\subseteq im\left(T^{k-3}\right)\cap\ker T\subseteq\cdots\subseteq\ker T$$

ניקח בסיס $T^{k-1}\left(v_1\right),\ldots,T^{k-1}\left(v_{r_1}\right)$ של $im\left(T^{k-1}\right)$.
נשלים אותו לבסיס עבור $im\left(T^{k-2}\right)\cap\ker T$ על ידי הוספת הווקטורים $T^{k-2}\left(v_{r_1+1}\right),\ldots,T^{k-2}\left(v_{r_2}\right)$.
נשלים את הבסיס שקיבלנו לבסיס עבור $im\left(T^{k-3}\right)\cap\ker T$ על ידי הוספת הווקטורים $T^{k-3}\left(v_{r_2+1}\right),\ldots,T^{k-3}\left(v_{r_3}\right)$.
נמשיך באותו האופן עד שנקבל בסיס של $\ker T$, שיהיה מהצורה (המפחידה)

$$T^{k-1}\left(v_1\right),\ldots,T^{k-1}\left(v_{r_1}\right),T^{k-2}\left(v_{r_1+1}\right),\ldots,T^{k-2}\left(v_{r_2}\right),\ldots,T\left(v_{r_{k+2}+1}\right),\ldots,T\left(v_{r_{k-1}}\right),v_{r_{k-1}+1},\ldots,v_{r_k}$$

(שימו לב שזה בסיס ל־$\ker T$ ולא לכל V, ולכן הוא לא הבסיס המז'רדן)
נוכיח שאיחוד המסלולים הבא מהווה בסיס של V (זהירות - מפלצת):

$$\left\{\begin{array}{ccc|ccc|c|ccc|cc}
v_1 & \cdots & v_{r_1} & & & & & & & & & \\
T\left(v_1\right) & \cdots & T\left(v_{r_1}\right) & v_{r_1+1} & \cdots & v_{r_2} & & & & & & \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \cdots & v_{r_{k-2}+1} & \cdots & v_{r_{k-1}} & & \\
T^{k-1}\left(v_1\right) & \cdots & T^{k-1}\left(v_{r_1}\right) & T^{k-2}\left(v_{r_1+1}\right) & \cdots & T^{k-2}\left(v_{r_2}\right) & & T\left(v_{r_{k-2}+1}\right) & \cdots & T\left(v_{r_{k-1}}\right) & v_{r_{k-1}+1} & \cdots
\end{array}\right.$$

1. <u>בת"ל</u> - ניקח צירוף לינארי מתאפס

$$(\star)\qquad \sum_{i=1}^{k}\sum_{d=1}^{i}\sum_{j=r_{d-1}+1}^{r_d}\alpha_{ij}T^{i-d}\left(v_j\right)=0$$

נפעיל T^{k-1} על שני האגפים. כמעט כל הווקטורים יתאפסו לפי בנייתם, ונקבל כי $\alpha_{11}T^{k-1}\left(v_1\right)+\cdots+\alpha_{1r_1}T^{k-1}\left(v_{r_1}\right)=0$. אבל זהו צירוף של איברי בסיס של imT^{k-1}, ולכן כל מקדמי השורה הראשונה מתאפסים; $\alpha_{11}=\cdots=\alpha_{1r_1}=0$.

נחזור ל־$(\star)$. קיבלנו

$$(\star\star)\qquad \sum_{i=2}^{k}\sum_{d=1}^{i}\sum_{j=r_{d-1}+1}^{r_d}\alpha_{ij}T^{i-d}\left(v_j\right)=$$
$$=\sum_{i=1}^{k}\sum_{d=1}^{i}\sum_{j=r_{d-1}+1}^{r_d}\alpha_{ij}T^{i-d}\left(v_j\right)=0$$

באופן דומה נוכל להפעיל T^{k-2}, ולקבל כי כל מקדמי השורה השנייה מתאפסים; $\alpha_{21}=\cdots=\alpha_{2r_2}=0$.

נמשיך באותו האופן, להראות שלכל $i=1,\ldots,k$, מקדמי השורה ה־i מתאפסים. לכן, כל המקדמים הם 0. הוכחנו בת"ל!

2. <u>פורשת</u> - לכל $m=1,\ldots,k-1$, הבסיס שבחרנו עבור $imT^m\cap\ker T$ מוכל ב־$T^m\left[B\right]$, ובפרט ב־$T^m\left[span\left(B\right)\right]$, שהוא תת־מרחב. לכן, $imT^m\cap\ker T\subseteq T^m\left[span\left(B\right)\right]$.

יהי $v\in V$. אזי $T^{k-1}\left(v\right)\in imT^{k-1}\subseteq imT^{k-1}\left[span\left(B\right)\right]$.

טענת עזר: לכל $m=1,\ldots,k-1$, אם $T^m\left(v\right)\in T^m\left[span\left(B\right)\right]$, אזי $T^{m-1}\left(v\right)\in T^{m-1}\left[span\left(B\right)\right]$.

הוכחה: יהי $u \in span\left(B\right)$ שעבורו $T^{m}\left(u\right) = T^{m}\left(v\right)$. לכן, $T\left(T^{m-1}\left(v\right) - T^{m-1}\left(u\right)\right) = 0$. אם כן,

$$T^{m-1}\left(v\right) - T^{m-1}\left(u\right) \in imT^{m-1} \cap \ker T \subseteq T^{m-1}\left[span\left(B\right)\right]$$

אבל $T^{m-1}\left(u\right) \in T^{m-1}\left[span\left(B\right)\right]$, ולכן $T^{m-1}\left(v\right) \in T^{m-1}\left[span\left(B\right)\right]$, כדרוש.

ידוע $T^{k-1}\left(v\right) \in imT^{k-1}\left[span\left(B\right)\right]$. לכן, לפי טענת העזר, $T^{k-2}\left(v\right) \in imT^{k-2}\left[span\left(B\right)\right]$, מכאן $T^{k-3}\left(v\right) \in imT^{k-3}\left[span\left(B\right)\right]$, וכן הלאה, עד שמגיעים לכך שמתקיים

$$v = T^{0}\left(v\right) \in imT^{0}\left[span\left(B\right)\right] = span\left(B\right)$$

כדרוש.