הפעם הראשונה שאנו לומדים לספור היא בעזרת האצבעות- אצבע אחת, שתי אצבעות וכן הלאה. במתמטיקה אנו קוראים למספרים האלה טבעיים ומסמנים:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$$

את המספרים הטבעיים אנחנו יכולים לחבר אחד עם השני, אבל אם ננסה לפתור את המשוואה $x + 2 = 1$ נגלה שאין פתרון בקבוצת הטבעיים. כדי לטפל בבעיה זו, נגדיר את קבוצת השלמים

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm1, \pm2, ...,\}$$

אך גם בקבוצה זו מתעוררת בעיה, משום שלמשוואה $2x = 1$. נגדיר את המספרים הרציונאליים (מהמילה האנגלית ratio, יחס), להיות כל השברים מהצורה

$$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}|p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$$

המספרים הרציונאליים הם כל המספרים שמתקבלים כיחס בין 2 מספרים שלמים. נשים לב שכל מספר שלם a הוא רציונאלי משום שניתן להצגה כ- $\frac{a}{1}$, יחס של 2 מספרים שלמים.

האם בזאת כיסינו את כל המספרים שאנחנו מכירים? לא, לדוגמה π, e הם מספרים לא רציונאליים (כרגע לא צריך לדעת את המשמעות של כל אחד מהם). גם המספר $\sqrt{2}$ לא רציונאלי. ההוכחה של זה מסתמכת על הרעיון של "הוכחה על דרך השלילה", אנחנו נניח שמה שאנחנו רוצים להוכיח לא נכון ונגיע לסתירה:

נניח ש- $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, אזי לפי הגדרה קיימים מספרים שלמים p, q ש- $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, בפרט אפשר להניח שזהו שבר "מצומצם", כלומר אם לדוגמה היה לנו $\frac{16}{34}$ נדאג לצמצם ל- $\frac{8}{17}$. לכל שבר יש צורה שאי אפשר לצמצם יותר, אנחנו נראה שאם $\sqrt{2}$ ניתן להציג כשבר, אין לו צורה כזאת, ומכאן תבוא הסתירה.

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

נעלה את שני האגפים בריבוע, ונקבל:

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

ולכן

$$2q^2 = p^2$$

כלומר p^2 הינו מספר זוגי (הוא מתחלק ב-2) ומכאן שגם p זוגי. נסמן אם כך $p = 2a$. ולכן:

$$2q^2 = 4a^2$$

נחלק ב2 את שני האגפים ונקבל

$$q^2 = 2a^2$$

כלומר גם q הינו מספר זוגי. אבל זה לא ייתכן, כיוון שהצגנו את שורש 2 כשבר מצומצם. לכן הגענו לסתירה המצביעה על העובדה שההנחה שלנו היא לא נכונה. ההנחה שלנו כמובן היא ששורש 2 הוא מספר רציונאלי.

לכן נרצה להגדיר את המספרים הממשיים, $\mathbb{R}$, הגדרה מדויקת יותר של הקבוצה נראה בהמשך. כרגע רק צריך לשים לב לעובדה שכל מספר ממשי ניתן לקרב אותו באיזו רמת דיוק שאנחנו רוצים ע"י מספר רציונאלי, לדוגמה אם נבחר לקרב את שורש 2 על ידי 10 הספרות הראשונות שלו, נקבל מספר רציונאלי:

$$1.4142135623 = \frac{14142135623}{10000000000}$$