1 המשך – מרחבים עצמיים מוכללים

למה 1. *יהי* $T_0 = T|_{K_\lambda}$, $m = \dim K_\lambda$. *אזי* $p_{T_0}(x) = (x-\lambda)^n$. *במילים אחרות, אם מצמצמים אופרטור למרחב עצמי מוכלל שלו, יש לו ערך עצמי יחיד, והוא* λ.

הוכחה. נתבונן באופרטור $T_0 - \lambda I : K_\lambda \to K_\lambda$. האופרטור $T_0 - \lambda I$ הוא אופרטור נילפוטנטי, כי $(T-\lambda I)^n = 0$ (זכרו שאנחנו במרחב העצמי המוכלל). לכן, הפולינום האופייני של $T_0 - \lambda I$ הוא $p_{T_0-\lambda I}(y) = y^m$ (לפי הלמה הקודמת). לפי ההגדרה,

$$y^m = p_{T_0-\lambda I}(y) = \det(yI - (T_0 - \lambda I)) = \det((y+\lambda)I - T_0)$$

נחליף את המשתנה: $x := y + \lambda$ (כלומר $y = x - \lambda$). נקבל

$$(x-\lambda)^m = \det(xI - T_0) = p_{T_0}(x)$$

כדרוש.

$\square$

אחת הנקודות ש"דחקנו" הצידה היא מהו המימד של K_λ. בלמה הקודמת השתמשנו בו מבלי לקרוא לו בשם. נזכור כי המרחב העצמי המוכלל מכיל את המרחב העצמי, ולכן מימדו חייב להיות גדול (או שווה) לריבוי הגיאומטרי. בלמה הקרובה נראה כי המימד הוא בדיוק הריבוי האלגברי של λ.

למה 2. $\dim K_\lambda$ *שווה לריבוי האלגברי של* λ.

הוכחה. נסמן B ו-B' בסיסים של K_λ ושל I_λ בהתאמה. נגדיר $\tilde{B} = B \cup B'$ (איחוד זר), $\tilde{B}$ בסיס של V. אם כן,

$$[T]_{\tilde{B}} = \begin{pmatrix} [T]_B & 0 \\ 0 & [T]_{B'} \end{pmatrix}$$

ולכן $p_T(x) = p_{T|_{K_\lambda}}(x) \cdot p_{T|_{I_\lambda}}(x)$. לכן, לפי הלמה הקודמת, אם נסמן $m = \dim K_\lambda$, נקבל

$$p_T(x) = p_{T|_{K_\lambda}}(x) \cdot p_{T|_{I_\lambda}}(x) = (x-\lambda)^m \cdot p_{T|_{I_\lambda}}(x)$$

נותר להוכיח ש-λ איננו שורש של $p_{T|_{I_\lambda}}(x)$. אנו יודעים כי $\{0\} \subseteq V_\lambda \subseteq K_\lambda \subseteq V$, והוכחנו כי $K_\lambda \cap I_\lambda = \{0\}$. לכן, גם $V_\lambda \cap I_\lambda = \{0\}$. כלומר, אין וקטור עצמי הקשור ל-λ ב-I_λ, ומכאן ששום ערך עצמי של האופרטור $T|_{I_\lambda}$ איננו שווה ל-λ. לכן, $(x-\lambda)$ אינו מחלק את הפולינום האופייני $p_{T|_{I_\lambda}}(x)$.

אם כן, m הוא הריבוי האלגברי של λ, כדרוש.

$\square$

בזכור, בתחילת הנושא אמרנו שאנו רוצים לפרק את המרחב שלנו לסכום ישר של תתי-מרחבים אינווריאנטיים, וכך המטריצה המייצגת תהיה אלכסונית בלוקים. המשפט שנוכיח בעת יציג את הפירוק, ובפרק הבא, שבו נגיע לצורה הסופית, נמצא בחירה מתאימה של בסיסים, שבה הבלוקים יהיו מצורה מסוימת.

משפט 3 (פירוק למרחבים עצמיים מוכללים). *נניח שהפולינום האופייני* $p_T(x)$ *של אופרטור לינארי* $T : V \to V$ *מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים מעל שדה* $\mathbb{F}$. *יהיו* $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{F}$ *הערכים העצמיים השונים של* T. *אזי*

$$V = K_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus K_{\lambda_s}$$

סכום ישר של תתי-מרחבים אינווריאנטיים.

הוכחה. רוב העבודה תהיה להוכיח שהסכום באגף ימין אכן ישר. נוכיח זאת באמצעות אינדוקציה על מספר המחוברים. עבור $s=1$ אין מה להוכיח.

בסיס האינדוקציה עבור $s=2$ - הוכחנו.

צעד האינדוקציה נניח שידוע שהסכום

$$K_{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus K_{\lambda_i}$$

הוא ישר, ונוכיח שהסכום של

$$K_{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus K_{\lambda_{i+1}}$$

ישר גם כן.

צריך להוכיח כי

$$\left(K_{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus K_{\lambda_i}\right)\cap K_{\lambda_{i+1}}=\{0\}$$

יהי $v\in K_{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus K_{\lambda_i}$, $v\in K_{\lambda_{i+1}}$. אם כן, $v=v_1+\cdots+v_i$, כאשר לכל $j=1,\ldots,i$, מתקיים $v_j\in K_{\lambda_j}$.

נפעיל את האופרטור $\left(T-\lambda_{i+1}I\right)^n$ על v. נקבל:

$$\begin{aligned}0&=\left(T-\lambda_{i+1}I\right)^n(v)=\left(T-\lambda_{i+1}I\right)^n(v_1+\cdots+v_i)=\\&=\underbrace{\left(T-\lambda_{i+1}I\right)^n(v_1)}_{\in K_{\lambda_1}}+\cdots+\underbrace{\left(T-\lambda_{i+1}I\right)^n(v_i)}_{\in K_{\lambda_i}}\end{aligned}$$

לפי הנחת האינדוקציה, הסכום

$$K_{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus K_{\lambda_i}$$

הוא ישר, ולכן ההצגה של 0 כסכום איברי $K_{\lambda_1},\ldots,K_{\lambda_s}$ היא יחידה, ולכן לכל $j=1,\ldots,i$, מתקיים

$$\left(T-\lambda_{i+1}I\right)^n(v_j)=0$$

מכאן שלכל $j=1,\ldots,i$ מתקיים $v_j\in K_{\lambda_{i+1}}$, אבל גם $v_j\in K_{\lambda_j}$. $\lambda_j\neq\lambda_{i+1}$, ולכן $v_j=0$. בסך הכל, $v=0$.

לכן הסכום ישר. כעת צריך להוכיח שהסכום (הישר) הוא אכן כל V. ניעזר בלמה הקודמת, ונקבל:

$$\dim\left(K_{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus K_{\lambda_s}\right)=\dim K_{\lambda_1}+\cdots+\dim K_{\lambda_s}=k_1+\cdots+k_s$$

לפי ההנחה, הפולינום האופייני מתפרק לגורמים לינאריים, ולכן

$$k_1+\cdots+k_s=\deg\left(p_T\right)=n=\dim V$$

בסך הכל, $K_{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus K_{\lambda_s}\subseteq V$ וגם $\dim\left(K_{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus K_{\lambda_s}\right)=\dim V$, ולכן

$$V=K_{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus K_{\lambda_s}$$

כדרוש.

□

2 מבוא למשפט ז'ורדן

בעת נראה מהו "משפט ז'ורדן", המשפט שעבדנו כל כך קשה כדי להגיע אליו. עד עכשיו הגענו למסקנה שבהנחה שהפולינום האופייני של אופרטור מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים (הנחה הגיונית, כי במקרה הכי גרוע אפשר להרחיב את השדה לשדה שבו זה יתפרק, ובכל מקרה אם הפולינום האופייני איננו מתפרק למכפלת גורמים לינאריים - לא ניתן אפילו לשלש אותו), קיים פירוק למרחבים עצמיים מוכללים - שזה בעצם סכום ישר של תתי-מרחבים אינווריאנטיים. כלומר, הצלחנו לפרק את המטריצה המייצגת למטריצת בלוקים. עכשיו הגיע הזמן לגלות מיהם הבלוקים - הלא הם בלוקי ז'ורדן! כל בלוק יהיה בעצמו מטריצה אלכסונית בלוקים, ששם כל בלוק יהיה בלוק ז'ורדן. לסיכום:

משפט 4 (משפט ז'ורדן)**.** *תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ מטריצה, כך שהפולינום האופייני שלה, $p_A(x)$, מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים מעל $\mathbb{F}$. אזי:*

1. *A דומה למטריצה אלכסונית בלוקים, כך שכל בלוק הוא בלוק ז'ורדן:*

$$A \sim \begin{pmatrix} \boxed{J_{m_1}(\lambda_1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{J_{m_k}(\lambda_k)} \end{pmatrix}$$

כאשר $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ אינם בהכרח שונים זה מזה. נסמן את הצורה הזו $\boxed{J}$.

2. *יהי $T : V \to V$ אופרטור לינארי כך שהפולינום האופייני שלו מתפרק לגורמים לינאריים. אזי T ניתן להצגה בצורה $\boxed{J}$.*

3. *ההצגה בצורה $\boxed{J}$ יחידה עד כדי שינוי סדר הבלוקים.*

הגדרה 1. $\boxed{J}$ נקראת **צורת הזו'רדן** ל-A (או ל-T).

הערה 1. 1. משפט ז'ורדן הוא הכללה של משפט השילוש.

2. במקרה ש-$p_A(x)$ מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים, אפשר לקבל את משפט קאלי-המילטון ממשפט ז'ורדן.

3. גם המשפט $m_A(x) \mid p_A(x) \mid [m_A(x)]^n$ נובע ממשפט ז'ורדן.