כזכור, בתחילת הנושא אמרנו שאנו רוצים לפרק את המרחב שלנו לסכום ישר של תתי־מרחבים אינווריאנטיים, וכך המטריצה המייצגת תהיה אלכסונית בלוקים. המשפט שנוכיח כעת יציג את הפירוק, ובפרק הבא, שבו נגיע לצורה הסופית, נמצא בחירה מתאימה של בסיסים, שבה הבלוקים יהיו מצורה מסוימת.

משפט: פירוק למרחבים עצמיים מוכללים

נניח שהפולינום האופייני $p_T(x)$ של אופרטור לינארי $T: V \to V$ מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים מעל שדה $\mathbb{F}$. יהיו $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{F}$ הערכים העצמיים השונים של T. אזי

$$V = K_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus K_{\lambda_s}$$

סכום ישר של תתי־מרחבים אינווריאנטיים.

הוכחה:

רוב העבודה תהיה להוכיח שהסכום באגף ימין אכן ישר. נוכיח זאת באמצעות אינדוקציה על מספר המחוברים.

עבור $s=1$ אין מה להוכיח.

בסיס האינדוקציה ־ עבור $s=2$ ־ הוכחנו.

צעד האינדוקציה ־ נניח שידוע שהסכום $K_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus K_{\lambda_i}$ הוא ישר, ונוכיח שהסכום של $K_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus K_{\lambda_{i+1}}$ ישר גם כן.

צריך להוכיח כי

$$\left(K_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus K_{\lambda_i}\right) \cap K_{\lambda_{i+1}} = \{0\}$$

יהי $v \in K_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus K_{\lambda_i}$, $v \in K_{\lambda_{i+1}}$. אם כן, $v = v_1 + \cdots + v_i$, כאשר לכל $j = 1, \ldots, i$, מתקיים $v_j \in K_{\lambda_j}$.

נפעיל את האופרטור $\left(T - \lambda_{i+1} I\right)^n$ על v. נקבל:

$$0 = \left(T - \lambda_{i+1} I\right)^n (v) = \left(T - \lambda_{i+1} I\right)^n (v_1 + \cdots + v_i) = \underbrace{\left(T - \lambda_{i+1} I\right)^n (v_1)}_{\in K_{\lambda_1}} + \cdots + \underbrace{\left(T - \lambda_{i+1} I\right)^n (v_i)}_{\in K_{\lambda_i}}$$

לפי הנחת האינדוקציה, הסכום $K_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus K_{\lambda_i}$ הוא ישר, ולכן ההצגה של 0 כסכום איברי $K_{\lambda_1}, \ldots, K_{\lambda_s}$ היא יחידה, ולכן לכל $j = 1, \ldots, i$, מתקיים $\left(T - \lambda_{i+1} I\right)^n (v_j) = 0$.

מכאן שלכל $j = 1, \ldots, i$ מתקיים $v_j \in K_{\lambda_{i+1}}$, אבל גם $v_j \in K_{\lambda_j}$. $\lambda_j \neq \lambda_{i+1}$, ולכן $v_j = 0$. בסך הכל, $v = 0$.

לכן הסכום ישר.

כעת צריך להוכיח שהסכום (הישר) הוא אכן כל V. ניעזר בלמה הקודמת, ונקבל:

$$\dim\left(K_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus K_{\lambda_s}\right) = \dim K_{\lambda_1} + \cdots + \dim K_{\lambda_s} = k_1 + \cdots + k_s$$

לפי ההנחה, הפולינום האופייני מתפרק לגורמים לינאריים, ולכן $k_1 + \cdots + k_s = \deg\left(p_T\right) = n = \dim V$.

בסך הכל, $K_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus K_{\lambda_s} \subseteq V$ וגם $\dim\left(K_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus K_{\lambda_s}\right) = \dim V$, ולכן

$$V = K_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus K_{\lambda_s}$$

כדרוש.