1 מרחבים עצמיים מוכללים

הוכחנו כי אם נצליח לפרק את המרחב שלנו לתתי-מרחבים אינווריאנטיים, המטריצה המייצגת של אופרטור תהיה אלכסונית בלוקים. כעת נבנה את המרחבים האלו. במקרה של אופרטור לכסין, היו n וקטורים עצמיים, ואז הפירוק היה בדיוק לסכום הישר של המרחבים העצמיים. עם זאת, במטריצות שאינן לכסינות (כמו בלוק ז'ורדן), אין מספיק וקטורים עצמיים, ולכן נכליל את ההגדרה ונגדיר:

הגדרה 1. יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ ממימד n, יהי $T:V\to V$ אופרטור לינארי, ויהי $\lambda\in\mathbb{F}$ ערך עצמי של T. נגדיר

$$K_\lambda=\ker\left[(T-\lambda I)^n\right]$$

K_λ נקרא **המרחב העצמי המוכלל** של T הקשור ל-λ.

נעבור להגדרה אחרת, נוכיח עליה למה פשוטה ואז נחזור למושג שהגדרנו.

הגדרה 2. יהי $T:V\to V$ אופרטור לינארי, ויהי $0\neq v\in V$. קבוצה בת m איברים מהצורה $E=\left\{T^{m-1}(v),\dots,T(v),v\right\}$ נקראת **מסלול מאורך** m, אם $T^{m-1}(v)\neq 0$, אבל $T^m(v)\neq 0$.

למה 1. *בסימונים הנ"ל, E קבוצה בת"ל.*

הוכחה. נניח ש-$\alpha_0 v+\alpha_1 T(v)+\dots+\alpha_{m-1}T^{m-1}(v)=0 \quad (\star)$. נפעיל T^{m-1}:

$$T^{m-1}\left(\alpha_0 v+\alpha_1 T(v)+\dots+\alpha_{m-1}T^{m-1}(v)\right)=T^{m-1}(0)$$

$$\alpha_0\underbrace{T^{m-1}(v)}_{\neq 0}+\underbrace{\alpha_1\cdot 0+\alpha_2\cdot 0+\dots+\alpha_{m-1}\cdot 0}_{0}=0$$

לכן $\alpha_0=0$. נציב ב-$(\star)$, ונקבל

$$(\star)\quad \alpha_1 T(v)+\dots+\alpha_{m-1}T^{m-1}(v)=0$$

הפעם נפעיל T^{m-2}, ועל ידי חישוב דומה נקבל $\alpha_1=0$. כך ממשיכים, ומקבלים

$$\alpha_0=\dots=\alpha_{m-1}=0$$

□

נחזור למרחב העצמי המוכלל.

למה 2. *יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$, יהי $T:V\to V$ אופרטור לינארי, ויהי $\lambda\in\mathbb{F}$ ערך עצמי של T.*

1. $K_\lambda=\left\{v\in V\mid \exists k\in\mathbb{N}:(T-\lambda I)^k v=0\right\}$.
2. $V_\lambda\subseteq K_\lambda$.
3. *K_λ תת-מרחב אינווריאנטי תחת T, ולכן גם תחת כל אופרטור בצורה $p(T)$, כאשר $p(x)\in\mathbb{F}[x]$ פולינום כלשהו.*

הוכחה. 1. נסמן $K'_\lambda = \left\{v \in V \mid \exists k \in \mathbb{N} : (T-\lambda I)^k v = 0\right\}$, ונוכיח $K_\lambda = K'_\lambda$.

$\boxed{\subseteq}$ טריוויאלי, אם ניקח $k = n$.

$\boxed{\supseteq}$ יהי $v \in K'_\lambda$. אם $v = 0$, הוא נמצא בכל תת-מרחב, ולכן נניח $v \neq 0$. נבחר את ה-k הקטן ביותר שעבורו $(T-\lambda I)^k (v) = 0$, ונתבונן במסלול

$$E = \left\{(T-\lambda I)^{k-1}(v), \dots, (T-\lambda I)(v), v\right\}$$

(הוא מסלול, לפי הבחירה של k). E בת"ל, $\dim V = n$, ולכן $k \leq n$. אם כן,

$$(T-\lambda I)^n (v) = (T-\lambda I)^{n-k} (T-\lambda I)^k (v) = (T-\lambda I)^{n-k}(0) = 0$$

2. לפי הסעיף הקודם,

$$V_\lambda = \{v \in V \mid T(v) = \lambda v\} = \{v \in V \mid (T-\lambda I)(v) = 0\} \subseteq K_\lambda$$

3. קודם נוכיח ש-K_λ אינווריאנטי תחת T. נשתמש בעובדה הבאה: האופרטורים T ו-$T-\lambda I$ מתחלפים, כלומר $(T-\lambda I)T = T^2 - \lambda T = T(T-\lambda I)$; לכן, גם כל חזקה של האחד מתחלפת עם חזקה של השני.

יהי $v \in K_\lambda$, ונוכיח $T(v) \in K_\lambda$.

$$(T-\lambda I)^n T(v) = T(T-\lambda I)^n (v) = T(0) = 0$$

עובדה כללית: אם $W \subseteq V$ תת-מרחב אינווריאנטי תחת T, ואם $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ פולינום כלשהו, אזי W אינווריאנטי גם תחת $p(T)$. נוכיח - יהי $v \in W$, ונסמן $p(T) = \alpha_0 I + \alpha_1 T + \dots + \alpha_s T^s$. אזי

$$(p(T))(v) = \underbrace{\alpha_0 \underbrace{I(v)}_{\in W}}_{\in W} + \underbrace{\alpha_1 \underbrace{T(v)}_{\in W}}_{\in W} + \dots + \underbrace{\alpha_s \underbrace{T^s(v)}_{\in W}}_{\in W}$$

בדרוש.

□

למה 3. *1. יהיו $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ שני ערכים עצמיים שונים של T, ויהי $0 \neq v \in K_\lambda$. אזי*

$$K_\lambda \ni (T-\lambda I)(v) \neq 0$$

2. יהיו $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ שני ערכים עצמיים שונים של T. אזי $K_\lambda \cap K_\mu = \{0\}$.

הוכחה. 1. K_λ אינווריאנטי. ניקח $p(T) = T - \mu I$, ונקבל כי $(T-\mu I)(v) \in K_\lambda$. נוכיח $(T-\mu I)(v) \neq 0$.

נניח בשלילה כי $(T-\mu I)(v) = 0$, לכן $T(v) = \mu v$. ניתן לבדוק כי אם ניקח פולינום $f(x) \in \mathbb{F}[x]$, אזי $f(T)(v) = f(\mu) v$. נבחר $f(x) = (x-\lambda)^n$. אם כן, נציב את T ונקבל $f(T) = (T-\lambda I)^n$. מכאן קיבלנו

$$\underbrace{(T-\lambda I)^n (v)}_{=0} = \underbrace{(\mu-\lambda)^n v}_{\neq 0}$$

בסתירה, בדרוש.

2. נניח שקיים $v\in K_\lambda$, $v\in K_\mu$. נוכיח ש-$v=0$.
נניח בשלילה ש-$v\neq 0$, ונתבונן בווקטורים הבאים:

$$\underbrace{v}_{\in K_\lambda,\neq 0},\underbrace{\left(T-\mu I\right)(v)}_{\in K_\lambda,\neq 0},\underbrace{\left(T-\mu I\right)^2(v)}_{\in K_\lambda,\neq 0},\ldots,\underbrace{\left(T-\mu I\right)^n(v)}_{\in K_\lambda,\neq 0}$$

בסתירה להנחה שלפיה $v\in K_\mu$.

□

הגדרנו את המרחב העצמי המוכלל בגרעין של האופרטור $(T-\lambda I)^n$. כעת הגיוני שנסתכל גם על התמונה של האופרטור, ונראה מה הקשר ביניהם.

הגדרה 3. יהי $T:V\to V$ אופרטור לינארי, $n=$ "0323imV, ויהי $\lambda\in\mathbb{F}$ ערך עצמי של T. נסמן

$$I_\lambda=\text{im}\left[(T-\lambda I)^n\right]$$

למה 4. *1. I_λ תת-מרחב אינווריאנטי תחת T.*

2. $V=K_\lambda\oplus I_\lambda$.

<u>תזכורת:</u>
ניזכר במשפט הדרגה מלינארית 1 לצורך ההוכחה.
יהי $E:V\to V$ אופרטור לינארי, אזי $\dim V=\dim(\ker T)+\dim(\text{im}\,T)$.

הוכחה. 1. כפי שציינו בהוכחת אחת הלמות הקודמות, T מתחלף עם $T-\lambda I$ ועם כל חזקה שלו. לכן, אם $v\in I_\lambda$, כלומר קיים $x\in V$ שעבורו $(T-\lambda I)^n(x)=v$, אזי

$$T(v)=T\left(T-\lambda I\right)^n(x)=\left(T-\lambda I\right)^n(T(x))\in I_\lambda$$

2. נתחיל מלהוכיח ש-$K_\lambda\cap I_\lambda=\{0\}$, כלומר שהסכום ישר.
נניח ש-$v\in K_\lambda$, $v\in I_\lambda$. אזי קיים $x\in V$ שעבורו $v=(T-\lambda I)^n(x)$, וכן $(T-\lambda I)^n(v)=0$. נקבל

$$x\in K_\lambda \Leftarrow (T-\lambda I)^{2n}(x)=0$$

לכן, $(T-\lambda I)^n(x)=0$, ולכן $v=0$, ומכאן אכן $K_\lambda\cap I_\lambda=\{0\}$.

כעת נרצה להוכיח שהסכום (הישר) אכן מכסה את המרחב כולו. לצורך כך, נסתכל על המימדים. ניקח $E=(T-\lambda I)^n$, ולפי התזכורת (משפט הדרגה להעתקות לינאריות),

$$\dim V=\dim K_\lambda+\dim I_\lambda=\dim\left(K_\lambda\oplus I_\lambda\right)$$

מתקיים $K_\lambda\oplus I_\lambda\subseteq V$, וכן $\dim V=\dim\left(K_\lambda\oplus I_\lambda\right)$ לכן $V=K_\lambda\oplus I_\lambda$.

□

למה 5. *אם $T:V\to V$ אופרטור נילפוטנטי, $n=\dim V$, אזי הפולינום האופייני של T הוא*

$$p_T(x)=x^n$$

הוכחה. $T^s=0$, ולכן x^s הוא פולינום מאפס ל-T. לכן, $m_T(x)|x^s$, ז"א $m_T(x)=x^k$.
אבל $p_T(x)\mid[m_T(x)]^n$, ולכן $p_T(x)|x^{kn}$, ובנוסף $\deg(p_T)=n$. לכן, $p_T(x)=x^n$.
$\square$

מסקנה 6. *$\lambda=0$ הוא ערך עצמי יחיד של כל אופרטור נילפוטנטי.*

שימו לב שאת המסקנה האחרונה ניתן להוכיח גם ללא המשפט, והמשפט ינבע ממנה.