הגדרנו את המרחב העצמי המוכלל כגרעין של האופרטור $(T-\lambda I)^n$. כעת הגיוני שנסתכל גם על התמונה של האופרטור, ונראה מה הקשר ביניהם.

**הגדרה:**
יהי $T:V\to V$ אופרטור לינארי, $\dim V=n$, ויהי $\lambda\in\mathbb{F}$ ערך עצמי של $T$. נסמן $I_\lambda=im\left[(T-\lambda I)^n\right]$.

**למה:**

1. $I_\lambda$ תת־מרחב אינווריאנטי תחת $T$.
2. $V=K_\lambda\oplus I_\lambda$.

<u>תזכורת:</u>
ניזכר במשפט הדרגה מלינארית 1 לצורך ההוכחה.
יהי $E:V\to V$ אופרטור לינארי, אזי $\dim V=\dim(\ker T)+\dim(imT)$.
*הוכחה:*

1. כפי שציינו בהוכחת אחת הלמות הקודמות, $T$ מתחלף עם $T-\lambda I$ ועם כל חזקה שלו. לכן, אם $v\in I_\lambda$, כלומר קיים $x\in V$ שעבורו $(T-\lambda I)^n(x)=v$, אזי
$$T(v)=T(T-\lambda I)^n(x)=(T-\lambda I)^n(T(x))\in I_\lambda$$
2. נתחיל מלהוכיח ש־$K_\lambda\cap I_\lambda=\{0\}$, כלומר שהסכום ישר.
נניח ש־$v\in K_\lambda$, $v\in I_\lambda$. אזי קיים $x\in V$ שעבורו $(T-\lambda I)^n(x)=v$, וכן $(T-\lambda I)^n(v)=0$. נקבל
$$x\in K_\lambda \Leftarrow (T-\lambda I)^{2n}(x)=0$$
לכן, $(T-\lambda I)^n(x)=0$, ולכן $v=0$ , ומכאן אכן $K_\lambda\cap I_\lambda=\{0\}$.
כעת נרצה להוכיח שהסכום (הישר) אכן מכסה את המרחב כולו. לצורך כך, נסתכל על המימדים. ניקח $E=(T-\lambda I)^n$, ולפי התזכורת (משפט הדרגה להעתקות לינאריות),
$$\dim V=\dim K_\lambda+\dim I_\lambda=\dim(K_\lambda\oplus I_\lambda)$$
מתקיים $K_\lambda\oplus I_\lambda\subseteq V$, וכן $\dim V=\dim(K_\lambda\oplus I_\lambda)$ לכן $V=K_\lambda\oplus I_\lambda$.