נחזור למרחב העצמי המוכלל.

למה:

יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$, יהי $T : V \to V$ אופרטור לינארי, ויהי $\lambda \in \mathbb{F}$ ערך עצמי של T.

1. $K_\lambda = \left\{ v \in V \mid \exists k \in \mathbb{N} : (T - \lambda I)^k v = 0 \right\}$.
2. $V_\lambda \subseteq K_\lambda$.
3. K_λ תת־מרחב אינווריאנטי תחת T, ולכן תחת כל אופרטור בצורה $p(T)$, כש־$p(x) \in \mathbb{F}[x]$ פולינום כלשהו.

הוכחה:

1. נסמן $K'_\lambda = \left\{ v \in V \mid \exists k \in \mathbb{N} : (T - \lambda I)^k v = 0 \right\}$, ונוכיח $K_\lambda = K'_\lambda$.

$\boxed{\subseteq}$

טריוויאלי, אם ניקח $k = n$.

$\boxed{\supseteq}$

יהי $v \in K'_\lambda$. אם $v = 0$, הוא נמצא בכל תת־מרחב, ולכן נניח $v \neq 0$. נבחר את ה־k הקטן ביותר שעבורו $(T - \lambda I)^k (v) = 0$, ונתבונן במסלול $E = \left\{ (T - \lambda I)^{k-1} (v), \dots, (T - \lambda I)(v), v \right\}$ (הוא מסלול, לפי הבחירה של k). E בת"ל, $\dim V = n$, ולכן $k \leq n$. אם כן,

$$(T - \lambda I)^n (v) = (T - \lambda I)^{n-k} (T - \lambda I)^k (v) = (T - \lambda I)^{n-k} (0) = 0$$

2. לפי הסעיף הקודם,

$$K_\lambda = \left\{ v \in V \mid \exists k \in \mathbb{N} : (T - \lambda I)^k v = 0 \right\}$$
$$V_\lambda = \{ v \in V \mid T(v) = \lambda v \} = \{ v \in V \mid (T - \lambda I)(v) = 0 \} \subseteq K_\lambda$$

3. קודם נוכיח ש־K_λ אינווריאנטי תחת T. נשתמש בעובדה הבאה: האופרטורים T ו־$T - \lambda I$ מתחלפים, כלומר $(T - \lambda I) T = T^2 - \lambda T = T (T - \lambda I)$; לכן, גם כל חזקה של האחד מתחלפת עם חזקה של השני.

יהי $v \in K_\lambda$, ונוכיח $T(v) \in K_\lambda$.

$$(T - \lambda I)^n T(v) = T (T - \lambda I)^n (v) = T(0) = 0$$

עובדה כללית: אם $W \subseteq V$ תת־מרחב אינווריאנטי תחת T, ואם $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ פולינום כלשהו, אזי W אינווריאנטי גם תחת $p(T)$. נוכיח - יהי $v \in W$, ונסמן $p(T) = \alpha_0 I + \alpha_1 T + \cdots + \alpha_s T^s$. אזי

$$(p(T))(v) = \underbrace{\alpha_0 \underbrace{I(v)}_{\in W}}_{\in W} + \underbrace{\alpha_1 \underbrace{T(v)}_{\in W}}_{\in W} + \cdots + \underbrace{\alpha_s \underbrace{T^s(v)}_{\in W}}_{\in W}$$

כדרוש.