מי שזוכר מהתיכון, תמיד בחקירת פונקציות היה צריך למצוא "נק' פיתול" ו"תחומי קעירות וקמירות". בשלב זה אתם אמורים לשים לב שמתמטיקאים לא מגדירים דברים כמו "קמור זה בשזה נראה מחייך" כמו שעשינו בתיכון. בחלק הזה נפרמל את הדברים ונראה גם שימוש של זה.

הגדרה 1. פונקציה $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ נקראת "קמורה" אם

$$\forall x_1,x_2\forall 0<\lambda<1: f(x_1+\lambda(x_2-x_1))\le f(x_1)+\lambda(f(x_2)-f(x_1))$$

כלומר **לכל** 2 נק' על גרף הפונקציה הקטע שמחבר ביניהם נמצא מעל גרף הפונקציה.
פונקציה נקראת קמורה ממש אם

$$\forall x_1\neq x_2\forall 0<\lambda<1: f(x_1+\lambda(x_2-x_1))< f(x_1)+\lambda(f(x_2)-f(x_1))$$

באופן אנלוגי מגדירים קעורה וקעורה ממש.

משפט 1. *תהי $f\in D(a,b)$ אזי*

1. *f קמורה אם ורק אם f' מונו עולה*
2. *f קעורה אם ורק אם f' מונו יורדת*
3. *f קמורה ממש אם ורק אם f' מונו עולה ממש*
4. *f קעורה ממש אם ורק אם f' מונו יורדת ממש*

הוכחה. נוכיח רק את 1, כל שאר ההוכחות דומות מאוד.

$\boxed{\Leftarrow}$

יהיו $x_1,x_2\in(a,b)$ ובה"כ $x_1<x_2$. ידוע ש- f קמורה ולכן $\forall 0<\lambda<1:$ $f(x_1+\lambda(x_2-x_1))\le f(x_1)+\lambda(f(x_2)-f(x_1))$. כעת נשים לב

$$\frac{f(x_1+\lambda(x_2-x_1))-f(x_1)}{\lambda(x_2-x_1)}\le\frac{f(x_1)+\lambda(f(x_2)-f(x_1))-f(x_1)}{\lambda(x_2-x_1)}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{(x_2-x_1)}$$

אבל אם $\lambda\to 0$ נקבל לפי הגדרה בצד שמאל את $f'(x_1)$ ולכן $f'(x_1)\le\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$
מצד שני

$$\frac{f(x_2+\lambda(x_1-x_2))-f(x_2)}{\underbrace{\lambda(x_1-x_2)}_{\text{negative is}}}\ge\frac{f(x_2)+\lambda(f(x_1)-f(x_2))-f(x_2)}{\lambda(x_1-x_2)}=$$

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{(x_1-x_2)}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

אבל אם $\lambda\to 0$ נקבל לפי הגדרה בצד שמאל את $f'(x_2)$ ולכן $f'(x_2)\ge\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$
לסיכום

$$f'(x_1)\le\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le f'(x_2)$$

לכן $f'\nearrow$

$\boxed{\Rightarrow}$

עבור $0 < \lambda < 1$ נגדיר $c = x_1 + \lambda(x_2 - x_1)$. ממשפט לגרנז' מתקיים ש- $\exists \xi_1 \in (x_1, c), \xi_2 \in (c, x_2) : f'(\xi_1) = \frac{f(c)-f(x_1)}{c-x_1}, f'(\xi_2) = \frac{f(x_2)-f(c)}{x_2-c}$

אבל f' מונוטונית עולה ולכן $f'(\xi_1) \le f'(\xi_2) \Rightarrow \frac{f(c)-f(x_1)}{c-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(c)}{x_2-c}$ נכפיל במכנה של כל צד (שניהם חיוביים) ונקבל

$$(x_2 - c)(f(c) - f(x_1)) \le (c - x_1)(f(x_2) - f(c)) \Rightarrow$$

$$(x_2 - c)f(c) + (c - x_1)f(c) \le (c - x_1)f(x_2) + (x_2 - c)f(x_1) \Rightarrow$$

$$f(c) \le \frac{x_2 - c}{x_2 - x_1}f(x_1) + \frac{c - x_1}{x_2 - x_1}f(x_2) \Rightarrow$$

$$f(x_1 + \lambda(x_2 - x_1)) \le \frac{(1-\lambda)(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1}f(x_1) + \frac{\lambda(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1}f(x_2) =$$

$$(1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) = f(x_1) + \lambda(f(x_2) - f(x_1))$$

כמו שרצינו. $\square$

נניח $f \in D^2(a, b)$ אזי

1. f קמורה אם ורק אם $\forall x : f''(x) \ge 0$
2. אם f קמורה ממש אזי $\forall x : f''(x) > 0$

ובאופן אנלוגי לקעורות.

הוכחה. 1. ראינו ש- $\forall x : f''(x) \ge 0$ אם ורק אם f' מונוטונית עולה בקטע ולפי המשפט האחרון זה נכון אם ורק אם f קמורה.

2. f קמורה ממש אזי f' מונוטונית עולה ממש ואז $\forall x : f''(x) > 0$

$\square$

הגדרה 2. נאמר ש- x_0 נק' פיתול אם קיימים δ_1, δ_2 כך ש- f קמורה ב- $[x_0 - \delta_1, x_0]$ וקעורה ב- $[x_0, x_0 + \delta_2]$ או ההפך.

משפט 2. *אם x_0 נק' פיתול ו- $f \in D^2(a, b)$ אזי $f''(x_0) = 0$*

הוכחה. נניח בה"כ שהפונקציה קמורה לפני x_0 וקעורה אחריה, אזי: $x_0 \in [x_0 - \delta_1, x_0]$ ולכן $f''(x_0) \ge 0$ ומצד שני $x_0 \in [x_0, x_0 + \delta_2]$ ואז $f''(x_0) \le 0$.
לסיכום $f''(x_0) = 0$ $\square$

תרגיל בית: אי שיוויון ינסן:
הוכיחו ש- f קמורה ב- (a, b) אם ורק אם

$$\forall_{x_1, \cdots x_n \in (a,b)} \forall_{\lambda_1, \cdots \lambda_n} : \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \Rightarrow f(\lambda_1 x_1 + \cdots \lambda_n x_n) \le \lambda_1 f(x_1) + \cdots \lambda_n f(x_n)$$

בעת נשים לב ש- $\ln x$ קעורה משום שהנגזרת השנייה שלה היא $-\frac{1}{x^2} < 0$. לכן אפשר להוכיח שמתקיים אי שיוויון ינצן הפוך ובעצם

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \Rightarrow \ln(\lambda_1 x_1 + \cdots \lambda_n x_n) \ge \lambda_1 \ln x_1 + \cdots \lambda_n \ln x_n$$

בעת נזכור ש- e^x מונוטונית עולה ולכן

$$e^{\lambda_1 \ln x_1 + \cdots \lambda_n \ln x_n} \leq e^{\ln(\lambda_1 x_1 + \cdots \lambda_n x_n)}$$

$$x_1^{\lambda_1} \cdot x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 x_1 + \cdots \lambda_n x_n$$

אם נבחר $\lambda_i = \frac{1}{n}$ נקבל את אי שיוויון הממוצעים:

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$