1 תתי-מרחבים אינווריאנטיים

נגדיר בעת הגדרה, שלכאורה הייתה קשורה ללינארית 1 בלבד. עם זאת, רק בקורס זה יש לה שימוש.

הגדרה 1. יהי $T: V \to V$ אופרטור לינארי. אומרים שתת-מרחב $U \subseteq V$ הוא **אינווריאנטי (תחת T)** או T**-אינווריאנטי** אם לכל $u \in U$ מתקיים $T(u) \in U$.

הרעיון הוא שבעת ניתן להגדיר את הצמצום של האופרטור $T|_U : U \to U$.

הערה 1. נתבונן באופרטור המצומצם $T|_U : U \to U$ (כאשר $T : V \to V$ אופרטור לינארי, $U \subseteq V$ תת-מרחב T-אינווריאנטי). אם B בסיס של U, נתבונן במטריצה $[T|_U]_B$ המייצגת של האופרטור $T|_U$ יחסית לבסיס B. נסמן אותה גם $[T]_B$, לצורך הפשטות. במילים אחרות, אם $B \subseteq V$ קבוצה בת"ל, ואם $span(B)$ תת-מרחב אינווריאנטי תחת T, אזי $\left[T|_{span(B)}\right]_B = [T]_B$.

בעת ננסה לראות מה קורה אם אנו מפרקים את המרחב לתתי-מרחבים אינווריאנטיים, ומסתכלים על מטריצה מייצגת של אופרטור. כך יתחברו שלושה מושגים שלמדנו לאחרונה - מטריצה אלכסונית בלוקים, סכום ישר ומרחבים אינווריאנטיים.

למה 1. *יהי $T: V \to V$ אופרטור לינארי.*

1. *יהי $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_k$ סכום ישר של תתי-מרחבים אינווריאנטיים. יהי B_i בסיס של U_i לכל $i = 1, \ldots, k$. נסמן $B = B_1 \cup \cdots \cup B_k = \bigcup_{i=1}^k B_i$. אזי*

$$[T]_B = \begin{pmatrix} [T]_{B_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & [T]_{B_k} \end{pmatrix}$$

2. *אם B בסיס של V, ואם*

$$[T]_B = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_1 \end{pmatrix}$$

אזי אפשר לחלק את B לאיחוד זר $B = B_1 \cup \cdots \cup B_k$, כך ש-$\text{Span}(B_i) = U_i$ לכל $i = 1, \ldots, k$ (העובדה ש-$V = \oplus U_1 \oplus \cdots \oplus U_k$ נובעת מהאיחוד של B_i).

הוכחה. 1. עבור $k = 1$ אין מה להוכיח. נניח ש-$k \geq 2$, ונשתמש באינדוקציה לפי k.

בסיס האינדוקציה $k = 2$. כלומר, $V = U_1 \oplus U_2$, B_1 בסיס ל-U_1 ו-B_2 בסיס ל-U_2. נסמן $B_1 = \{v_1, \ldots, v_r\}$ ו-$B_2 = \{u_1, \ldots, u_s\}$. אזי

$$B = B_1 \cup B_2 = \{v_1, \ldots, v_r, u_1, \ldots, u_s\}$$

נחשב את $[T]_B$.

U_1 תת-מרחב אינווריאנטי, ולכן לכל $i = 1, \ldots, r$, $T(v_i) \in U_1$, ומכאן

$$[T(v_i)]_B = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} [T(v_i)]_{B_1} \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} r \\ s \end{matrix} \end{array}$$

באופן דומה, לכל $j=1,\ldots,s$,

$$[T(u_j)]_B=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}0\\ [T(u_j)]_{B_2}\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c}r\\ s\end{array}$$

בסך הכל, קיבלנו שמתקיים

$$[T]_B=\left([T(v_1)]_B,\ldots,[T(u_s)]_B\right)=$$
$$=\left(\begin{array}{c|c}[T(v_1)]_{B_1}\cdots[T(v_r)]_{B_1} & 0\\ \hline 0 & [T(u_1)]_{B_2}\cdots[T(u_s)]_{B_2}\end{array}\right)$$

צעד האינדוקציה נניח כי $V=(U_1\oplus\cdots\oplus U_{k-1})\oplus U_k$, וכן $B=\bigcup_{i=1}^{k}B_i$. לפי המקרה $k=2$ שהוכחנו,

$$[T]_B=\left(\begin{array}{c|c}[T]_{B_1\cup\cdots\cup B_{k-1}} & 0\\ \hline 0 & B_k\end{array}\right)\overset{\text{hypothesis}}{=}\begin{pmatrix}\boxed{[T]_{B_1}} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{[T]_{B_k}}\end{pmatrix}$$

כדרוש.

2. נתונה המטריצה המייצגת

$$[T]_B=\begin{pmatrix}\boxed{A_1} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{A_1}\end{pmatrix}$$

יחסית לבסיס B כלשהו.

עבור $k=1$ אין מה להוכיח. נניח $k\geq 2$, ונשתמש באינדוקציה לפי k.

בסיס האינדוקציה $k=2$, כלומר

$$[T]_B=\left(\begin{array}{c|c}A_1 & 0\\ \hline 0 & A_2\end{array}\right)$$

נניח $A_1\in M_r(\mathbb{F})$ ו-$A_2\in M_s(\mathbb{F})$. נסמן את איברי B כך:

$$B=\{v_1,\ldots,v_r,u_1,\ldots,u_s\}$$

ונגדיר $B_1=\{v_1,\ldots,v_r\}$, $B_2=\{u_1,\ldots,u_s\}$, $U_1=\mathsf{Span}(B_1)$ וכן $U_2=\mathsf{Span}(B_2)$. אזי:

$$\left([T(v_1)]_B\quad\cdots\quad[T(v_r)]_B\quad[T(u_1)]_B\quad\cdots\quad[T(u_s)]_B\right)=[T]_B=$$
$$=\left(\begin{array}{c|c}A_1 & 0\\ \hline 0 & A_2\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c}A_1e_1\cdots A_1e_r & 0\\ \hline 0 & A_2e_1\cdots A_2e_s\end{array}\right)$$

אם כן, על פי שוויון כל עמודה, לכל $i=1,\ldots,r$, $[T(v_i)]_B=A_1e_i$, וכן לכל $j=1,\ldots,s$, $[T(u_j)]_B=A_2e_j$.
כלומר, לכל $v_i\in B_1$, מתקיים $T(v_i)\in\mathsf{Span}(B_1)=U_1$, ולכן לכל $v\in U_1$ מתקיים $T(v)\in U_1$, זאת אומרת ש-U_1 תת-מרחב אינווריאנטי. באופן דומה, גם U_2 אינווריאנטי, כדרוש.

צעד האינדוקציה נתונה המטריצה המייצגת

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{A_k} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} \tilde{A} & 0 \\ \hline 0 & A_k \end{array}\right)$$

מהמקרה $k = 2$ שהוכחנו, נקבל חלוקה של B לאיחוד זר $B = \tilde{B} \cup B_k$, כך ש-$\tilde{U} = \text{Span}\,\tilde{B}$ ו-$U_k = \text{Span}\,(B_k)$ הם תתי-מרחבים אינווריאנטיים. לפי הנחת האינדוקציה, נחלק את $\tilde{B}$ לאיחוד זר, $\tilde{B} = B_1 \cup \cdots \cup B_{k-1}$, שעבורו $U_i = \text{Span}\,(B_i)$ תתי-מרחבים אינווריאנטיים לכל $i = 1, \ldots, k-1$, כדרוש.

□

מהמשפט הזה נגיע למספר מסקנות חשובות.

מסקנה 2. *אם B בסיס של V כך ש-$[T]_B$ אלכסונית בלוקים,*

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{A_k} \end{pmatrix}$$

אזי לכל $\sigma \in S_k$ קיים בסיס B' של V שעבורו

$$[T]_{B'} = \begin{pmatrix} \boxed{A_{\sigma(1)}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{A_{\sigma(k)}} \end{pmatrix}$$

הוכחה. מהחלק השני של הלמה הקודמת, קיימת חלוקה של B ל-k חלקים זרים, כך שהמטריצה המייצגת תהיה

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{A_k} \end{pmatrix}$$

נסדר את החלקים $B' = B_{\sigma(1)} \cup \cdots \cup B_{\sigma(k)}$. לפי החלק הראשון של הלמה, נקבל

$$[T]_{B'} = \begin{pmatrix} \boxed{A_{\sigma(1)}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{A_{\sigma(k)}} \end{pmatrix}$$

□

מסקנה 3. *שתי מטריצות אלכסוניות בעלות אותן בלוקים בסדר שונה דומות זו לזו; לכל $\sigma \in S_k$,*

$$= \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{A_k} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{A_{\sigma(1)}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{A_{\sigma(k)}} \end{pmatrix}$$

הוכחה. שתי המטריצות הן מייצגות של אותו אופרטור T יחסית לבסיסים שונים.

$\square$

נזכיר כי ברצוננו למצוא לכל אופרטור בסיס, שבו המטריצה המייצגת תהיה מצורה מסוימת (שקול: לכל מטריצה למצוא מטריצה דומה מהצורה הזו). כעת ברור שאם נצליח לפרק את המרחב שלנו לתתי-מרחבים אינווריאנטיים, אזי נוכל להגיע לצורה אלכסונית בלוקים. בחלק הבא, לאחר הלמה שנוכיח מיד, נמצא את המרחבים האלו, ולאחר מכן נראה מהם הבלוקים.

למה 4. *יהי $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_k$ סכום ישר של תתי-מרחבים אינווריאנטיים תחת האופרטור הלינארי $T : V \to V$. אזי מתקיים:*

1. $\ker T = \ker T|_{U_1} \oplus \cdots \oplus \ker T|_{U_k}$
2. $\operatorname{im} T = \operatorname{im} T|_{U_1} \oplus \cdots \oplus \operatorname{im} T|_{U_k}$

הוכחה. כל $v \in V$ ניתן להצגה בצורה $v = u_1 + \cdots + u_k$, כאשר $u_i \in U_i$ לכל $i = 1, \ldots, k$. לכן, $T(v) = T(u_1) + \cdots + T(u_k)$. לכן $w = w_1 + \cdots + w_k$, כאשר לכל $i = 1, \ldots, k$, מתקיים $w_i \in U_i$ כי U_i אינווריאנטי.

$$u_i \in \ker T|_{U_i} \Leftrightarrow (i = 1, \ldots, k)\, w_i = 0 \Leftrightarrow w = 0 \Leftrightarrow T(v) = 0 \Leftrightarrow v \in \ker T$$

$$w_i \in \operatorname{im} T|_{U_i} \Leftrightarrow w \in \operatorname{im} T$$

שני הסכומים הם ישרים, כי המחוברים הם תתי-מרחבים של U_i.

$\square$