

כעת ננסה לראות מה קורה אם אנו מפרקים את המרחב לתתי-מרחבים אינווריאנטיים, ומסתכלים על מטריצה מייצגת של אופרטור. כך יתחברו שלושה מושגים שלמדנו לאחרונה - מטריצה אלכסונית בלוקים, סכום ישר ומרחבים אינווריאנטיים.

למה 1. יהי $T : V \rightarrow V$ אופרטור לינארי.

1. יהי $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$ סכום ישר של תתי-מרחבים אינווריאנטיים. יהי B_i בסיס של U_i לכל $i = 1, \dots, k$. נסמן $B = B_1 \cup \dots \cup B_k = \bigcup_{i=1}^k B_i$ אזי

$$[T]_B = \left(\begin{array}{c|ccc} [T]_{B_1} & & & 0 \\ \hline & \ddots & & \\ 0 & & & [T]_{B_k} \end{array} \right)$$

2. אם B בסיס של V , ואם

$$[T]_B = \left(\begin{array}{c|ccc} A_1 & & & 0 \\ \hline & \ddots & & \\ 0 & & & A_1 \end{array} \right)$$

אזי אפשר לחלק את B לאיחוד זר $B = B_1 \cup \dots \cup B_k$, כך ש- $\text{Span}(B_i) = U_i$, $i = 1, \dots, k$ (העובדה ש- $V = \bigoplus_{i=1}^k U_i$ נובעת מהאיחוד של B_i).

הוכחה. עבור $k = 1$ אין מה להוכיח. נניח ש- $k \geq 2$, ונשתמש באינדוקציה לפי k .

בסיס האינדוקציה $k = 2$. כלומר, $V = U_1 \oplus U_2$, B_1 בסיס ל- U_1 ו- B_2 בסיס ל- U_2 . נסמן $B_1 = \{v_1, \dots, v_r\}$ ו- $B_2 = \{u_1, \dots, u_s\}$. אזי

$$B = B_1 \cup B_2 = \{v_1, \dots, v_r, u_1, \dots, u_s\}$$

נחשב את $[T]_B$.

U_1 תת-מרחב אינווריאנטי, ולכן לכל $i = 1, \dots, r$, $T(v_i) \in U_1$, ומכאן

$$[T(v_i)]_B = \begin{pmatrix} [T(v_i)]_{B_1} \\ 0 \end{pmatrix}_s^r$$

באופן דומה, לכל $j = 1, \dots, s$,

$$[T(u_j)]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ [T(u_j)]_{B_2} \end{pmatrix}_s^r$$

בסך הכל, קיבלנו שמתקיים

$$\begin{aligned} [T]_B &= ([T(v_1)]_B, \dots, [T(u_s)]_B) = \\ &= \left(\begin{array}{c|ccc} [T(v_1)]_{B_1} \cdots [T(v_r)]_{B_1} & & & 0 \\ \hline 0 & & & [T(u_1)]_{B_2} \cdots [T(u_s)]_{B_2} \end{array} \right) \end{aligned}$$

צעד האינדוקציה נניח כי $V = (U_1 \oplus \dots \oplus U_{k-1}) \oplus U_k$, וכן $B = \bigcup_{i=1}^k B_i$. לפי המקרה $k = 2$ שהוכחנו,

$$[T]_B = \left(\begin{array}{c|c} [T]_{B_1 \cup \dots \cup B_{k-1}} & 0 \\ \hline 0 & B_k \end{array} \right) \stackrel{\text{hypothesis}}{=} \begin{pmatrix} [T]_{B_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & [T]_{B_k} \end{pmatrix}$$

כדרוש.

2. נתונה המטריצה המייצגת

$$[T]_B = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_1 \end{pmatrix}$$

יחסית לבסיס B כלשהו.

עבור $k = 1$ אין מה להוכיח. נניח $k \geq 2$, ונשתמש באינדוקציה לפי k .

בסיס האינדוקציה $k = 2$, כלומר

$$[T]_B = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array} \right)$$

נניח $A_1 \in M_r(\mathbb{F})$ ו- $A_2 \in M_s(\mathbb{F})$. נסמן את איברי B כך:

$$B = \{v_1, \dots, v_r, u_1, \dots, u_s\}$$

ונגדיר $U_1 = \text{Span}(B_1)$, $B_2 = \{u_1, \dots, u_s\}$, $B_1 = \{v_1, \dots, v_r\}$ וכן $U_2 = \text{Span}(B_2)$ אזי:

$$\begin{aligned} ([T(v_1)]_B \ \dots \ [T(v_r)]_B \ [T(u_1)]_B \ \dots \ [T(u_s)]_B) &= [T]_B = \\ &= \left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} A_1 e_1 \ \dots \ A_1 e_r & 0 \\ \hline 0 & A_2 e_1 \ \dots \ A_2 e_s \end{array} \right) \end{aligned}$$

אם כן, על פי שוויון כל עמודה, לכל $i = 1, \dots, r$, $[T(v_i)]_B = A_1 e_i$, וכן לכל $[T(u_j)]_B = A_2 e_j$, $j = 1, \dots, s$.

כלומר, לכל $v_i \in B_1$, מתקיים $T(v_i) \in \text{Span}(B_1) = U_1$, ולכן לכל $v \in U_1$, מתקיים $T(v) \in U_1$, זאת אומרת ש- U_1 תת-מרחב אינווריאנטי. באופן דומה, גם U_2 אינווריאנטי, כדרוש.

צעד האינדוקציה נתונה המטריצה המייצגת

$$[T]_B = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} \tilde{A} & 0 \\ \hline 0 & A_k \end{array} \right)$$

המקרה $k = 2$ שהוכחנו, נקבל חלוקה של B לאיחוד זר $B = \tilde{B} \cup B_k$, כן $\tilde{U} = \text{Span} \tilde{B}$ ו- $U_k = \text{Span}(B_k)$ הם תתי-מרחבים אינווריאנטיים. לפי הנחת האינדוקציה, נחלק את \tilde{B} לאיחוד זר, $\tilde{B} = B_1 \cup \dots \cup B_{k-1}$, שעבורו $U_i = \text{Span}(B_i)$ תתי-מרחבים אינווריאנטיים לכל $i = 1, \dots, k-1$, כדרוש.

□

מהמשפט הזה נגיע למספר מסקנות חשובות.

מסקנה 2. אם B בסיס של V כך ש- $[T]_B$ אלכסונית בלוקים,

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{A_k} \end{pmatrix}$$

אזי לכל $\sigma \in S_k$ קיים בסיס B' של V שעבורו

$$[T]_{B'} = \begin{pmatrix} \boxed{A_{\sigma(1)}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{A_{\sigma(k)}} \end{pmatrix}$$

הוכחה. מהחלק השני של הלמה הקודמת, קיימת חלוקה של B ל- k חלקים זרים, כך שהמטריצה המייצגת תהיה

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{A_k} \end{pmatrix}$$

נסדר את החלקים $B_{\sigma(1)} \cup \dots \cup B_{\sigma(k)}$. לפי החלק הראשון של הלמה, נקבל

$$[T]_{B'} = \begin{pmatrix} \boxed{A_{\sigma(1)}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{A_{\sigma(k)}} \end{pmatrix}$$

□

מסקנה 3. שתי מטריצות אלכסוניות בעלות אותן בלוקים בסדר שונה דומות זו לזו; לכל $\sigma \in S_k$

$$\begin{pmatrix} A_{\sigma(1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{\sigma(k)} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k \end{pmatrix}$$

הוכחה. שתי המטריצות הן מייצגות של אותו אופרטור T יחסית לבסיסים שונים.

□

נזכיר כי ברצוננו למצוא לכל אופרטור בסיס, שבו המטריצה המייצגת תהיה מצורה מסוימת (שקול: לכל מטריצה למצוא מטריצה דומה מהצורה הזו). כעת ברור שאם נצליח לפרק את המרחב שלנו לתתי-מרחבים אינווריאנטיים, אזי נוכל להגיע לצורה אלכסונית בלוקים. בחלק הבא, לאחר הלמה שנוכיח מיד, נמצא את המרחבים האלו, ולאחר מכן נראה מהם הבלוקים.