1 סכום ישר של תתי-מרחבים

הגדרה 1. יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$, ויהיו $U_1, \dots, U_k \subseteq V$ תתי-מרחבים של V.
הסכום $W = U_1 + U_2 + \dots + U_k$ הוא **סכום ישר**, אם לכל $i = 2, \dots, k$, הסכום

$$((U_1 + U_2) + \dots + U_i)$$

הוא ישר (ז"א שלכל $i = 2, \dots, k$, מתקיים: $(((U_1 + U_2) + \dots + U_{i-1}) \cap U_i = \{0\}$).
הסימון הוא $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$.

נראה עכשיו דרך פשוטה להשיג את המרחב הווקטורי הגדול, V, בסכום ישר של תתי-מרחבים. הדרך היא באמצעות לקיחת בסיס של V ופירוקו לתתי-קבוצות. כל תת-קבוצה תפרוש מרחב בסכום.

למה 1. *אם בסיס B של V הוא איחוד זר של הקבוצות $B_1, \dots, B_k$, ואם לכל $i = 1, \dots, k$, $U_i = \text{span}(B_i)$, אזי $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$.*

הוכחה. נתחיל מלהוכיח ש-$V = U_1 + \dots + U_k$, ז"א שכל $x \in V$ ניתן להצגה בסכום

$$x = u_1 + \dots + u_k$$

כך שלכל $i = 1, \dots, k$, $u_i \in U_i$. זה נובע מההצגה של x כצירוף לינארי של איברי B.
נעבור להוכיח שהסכום הוא ישר. נתבונן בחיתוך

$$W = \underbrace{((U_1 + U_2) + U_{i-1})}_{\tilde{W}} \cap U_i$$

נניח שקיים $x \in \tilde{W}$ ו-$x \in U_i$. לכן, ניתן להציג אותו כצירוף לינארי של איברי הבסיס $B_1 \cup \dots \cup B_{i-1}$, כלומר גם בסכום $x = u_1 + \dots + u_{i-1}$, כאשר לכל $j = 1, \dots, i-1$, מתקיים $u_j \in U_j$, והוא צירוף לינארי של איברי B_j. כמו כן, x ניתן להצגה בצירוף לינארי של איברי הבסיס B_i, כי $x \in U_i$.
עם זאת, מתקיים $(B_1 \cup \dots \cup B_{i-1}) \cap B_i = \emptyset$. לכן, מיחידות ההצגה של x בצירוף לינארי של איברי B, נובע שכל המקדמים בצירופים הם אפסים, ולכן $x = 0$.
$\square$

דוגמה 1. נראה דוגמה לסכום ישר, המבוססת על הלמה שהוכחנו. עבור $V = \mathbb{R}^3$, נגדיר את תתי-המרחבים $U_1 = span\{(1,0,0)\}$, $U_2 = span\{(0,1,0)\}$, ו-$U_3 = span\{(0,0,1)\}$. אזי $V = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$.

דוגמה 2. ייתכן המצב שבו הסכום $U_1 + U_2 + U_3$ איננו ישר, אך כל אחד מהסכומים $U_1 + U_2$, $U_1 + U_3$ ו-$U_2 + U_3$ ישר.
למשל: $V = \mathbb{R}^3$, $U_1 = span\{(1,0)\}$, $U_2 = span\{(0,1)\}$, ו-$U_3 = span\{(1,1)\}$.

למה 2. *יהי $W = U_1 + \dots + U_k$ סכום של תתי-מרחבים של V. אזי התנאים הבאים שקולים:*

1. *הסכום $W = U_1 + \dots + U_k$ הוא ישר.*
2. *נניח כי מתקיים $u_1 + u_2 + \dots + u_k = 0$, כאשר לכל $i = 1, \dots, k$, $u_i \in U_i$, אזי $u_1 = \dots = u_k = 0$.*

3. *לכל* $w \in W$ *יש הצגה יחידה כסכום* $w = u_1 + u_2 + \cdots + u_k$*, כאשר* $u_i \in U_i$.

4. *לכל* $i = 1, \ldots, k$*, מתקיים* $(U_1 + \cdots + U_{i-1} + U_{i+1} + \cdots + U_k) \cap U_i = \emptyset$.

5. *לכל* $\sigma \in S_k$ *מתקיים* $W = U_{\sigma(1)} \oplus \cdots \oplus U_{\sigma(k)}$.

הוכחה. $\boxed{1 \Leftarrow 2}$ נניח ש-$u_1 + \cdots + u_k = 0$, לכן $\underbrace{u_1 + \cdots + u_{k-1}}_{\in U_1 + \cdots + U_{k-1}} = \underbrace{-u_k}_{\in U_k}$. אבל לפי הגדרת הסכום הישר, $(U_1 + \cdots + U_{k-1}) \cap U_k = \{0\}$, ולכן $u_k = 0$. באופן דומה ממשיכים, ומקבלים $u_1 = \cdots = u_k = 0$.

$\boxed{2 \Leftarrow 3}$ לפי הגדרת הסכום, לכל $w \in W$ יש הצגה בסכום $w = u_1 + \cdots + u_k$, כאשר $u_i \in U_i$. נניח כי קיימות ל-w שתי הצגות, $u_1 + \cdots + u_k = w = \tilde{u}_1 + \cdots + \tilde{u}_k$. אזי $\underbrace{(u_1 - \tilde{u}_1)}_{\in U_1} + \cdots + \underbrace{(u_k - \tilde{u}_k)}_{\in U_k} = 0$ לכן, לפי סעיף 2, לכל $i = 1, \ldots, k$, מתקיים $u_i - \tilde{u}_i = 0$, כלומר $u_i = \tilde{u}_i$, ולכן ההצגות זהות.

$\boxed{3 \Leftarrow 4}$ נניח שקיים $z \in V$ כך ש-$z \in U_1 + \cdots + U_{i-1} + U_{i+1} + \cdots + U_k$ וכן $z \in U_i$. לכן קיימים $u_i \in U_i$ שעבורם $u_i = z = u_1 + \cdots + u_{i-1} + u_{i+1} + \cdots + u_k$. אבל לפי סעיף 3 נקבל $u_1 = \cdots = u_k = 0$, ולכן $z = 0$.

$\boxed{4 \Leftarrow 5}$ תהי $\sigma \in S_k$. ראשית, נוכיח שהסכום $U_{\sigma(1)} + \cdots + U_{\sigma(k)}$ ישר. לכל $i = 2, \ldots, k$,

$$\left(U_{\sigma(1)} + \cdots + U_{\sigma(i-1)}\right) \cap U_i \subseteq \left(U_{\sigma(1)} + \cdots + U_{\sigma(i-1)} + U_{\sigma(i+1)} + \cdots + U_k\right) \cap U_i = \{0\}$$

לכן $\left(U_{\sigma(1)} + \cdots + U_{\sigma(i-1)}\right) \cap U_i = \{0\}$, ומכאן שהסכום ישר.

בעת נוכיח ש-$W = U_{\sigma(1)} + \cdots + U_{\sigma(k)}$.

$w \in U_1 + \cdots + U_k \Leftrightarrow$ לכל $i = 1, \ldots, k$ קיים $u_i \in U_i$ שעבורם $x = u_1 + \cdots + u_k$ $\Leftrightarrow$ לכל $i = 1, \ldots, k$ קיים $u_{\sigma(i)} \in U_{\sigma(i)}$ שעבורם $x = u_{\sigma(1)} + \cdots + u_{\sigma(k)} \Leftrightarrow$ $w \in U_{\sigma(1)} + \cdots + U_{\sigma(k)}$

$\boxed{5 \Leftarrow 1}$ נבחר בתור σ את תמורת הזהות.

$\square$

הוכחנו מספר תנאים שקולים להיות סכום ישר, ונשאלת השאלה - במרחב וקטורי, מהו המימד שלו? באלגברה לינארית 1, הוכחנו שעבור 2 מרחבים, המימד של הסכום הישר הוא סכום המימדים. נוכיח שנוסחה דומה עובדת במקרה הכללי:

למה 3. *יהי* $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_k$*. אזי:*

1. *אם* B_i *בסיס של* U_i *(לכל* $i = 1, \ldots, k$*), אזי* $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_k$ *בסיס של* V.

2. $\dim V = \dim U_1 + \cdots + \dim U_k$.

הוכחה. 1. נוכיח פרישה ובת"ל.

B **פורשת** יהי $v \in V$. אזי קיימים $u_i \in U_i$ לכל $i = 1, \ldots, k$ שעבורם $v = u_1 + \cdots + u_k$. כל u_i ניתן להציג באמצעות איברים מ-B, ולכן גם v ניתן להציג באמצעות איברים מ-B, כלומר B פורשת.

B **בת"ל** נובע מסעיף 2 מהלמה הקודמת.

2. במסקנה ישירה מהסעיף הקודם,

$$\dim V = |B| = |B_1| + \cdots + |B_k| = \dim U_1 + \cdots + \dim U_k$$

$\square$

למה 4. *אם* $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_k$*, ולכל* $i = 1, \ldots, k$ *נתונים תתי-מרחבים* $V_i, W_i \subseteq U_i$*, אזי:*

$$(V_1 \oplus \cdots \oplus V_k) \cap (W_1 \oplus \cdots \oplus W_k) = (V_1 \cap W_1) \oplus \cdots \oplus (V_k \cap W_k)$$

הוכחה. הביטוי בצד שמאל חוקי; הסכומים ישרים, כי V_i ו-W_i הם חלקים של U_i, ולכן כל החיתוכים הנדרשים הם אפסים. אותו נימוק עובד לביטוי בצד ימין, והסכום הוא גם ישר.

נוכיח את השוויון הדרוש באמצעות הכלה דו-כיוונית.

$\boxed{\subseteq}$ יהי $z \in (V_1 \oplus \cdots \oplus V_k) \cap (W_1 \oplus \cdots \oplus W_k)$. לכן $z = v_1 + \cdots + v_k$ ומתקיים $z = w_1 + \cdots + w_k$. קיבלנו שמתקיים

$$\underbrace{v_1}_{\in U_1} + \cdots + \underbrace{v_k}_{\in U_k} = \underbrace{w_1}_{\in U_1} + \cdots + \underbrace{w_k}_{\in U_k}$$

לפי יחידות ההצגה, $v_i = w_i \in V_i \cap W_i$ לכל $i = 1, \ldots, k$; לכן,

$$z \in (V_1 \cap W_1) \oplus \cdots \oplus (V_k \cap W_k)$$

$\boxed{\supseteq}$ יהי $z \in (V_1 \cap W_1) \oplus \cdots \oplus (V_k \cap W_k)$, לכן $z = u_1 + \cdots + u_k$.

מצד אחד, $u_i \in V_i$ לכל i, ולכן $z \in V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$. מצד שני, $u_i \in W_i$ לכל i, ולכן $z \in W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$.

בסך הכל, $z \in (V_1 \oplus \cdots \oplus V_k) \cap (W_1 \oplus \cdots \oplus W_k)$.

$\square$